数理解析研究所講究録
225巻 1975年 72-234



# $b$函数の理論
# Examples

修士論文　暫定改訂版

京大大学院 DC1
数理研配属
矢野環

# 序．

これは，京都大学大学院修士課程研究論文として提出した，「b函数の理論」に若干手を加えたものである．変更された点は次の通り．

1. 基本予想 $S$ とよばれるものは，$\mathcal{P}$にて定式化すべきこと明らかになったため，それに合うよう書きかえた．又，旧予想 $S$ は $S_g$ とし，$S_g$ の反例の NThm について，一般的事項を加えた。
2. non-isolated の場合の計算が進んだことにより，全く新しい事態がおこったので，それについて書き加えた．
3. Join theorem の b-fn version について，全くうらづけがとれたので，書き入れた．

その他，いくつかの変更がなされた．

1974.4.22.

# 目次.

# Notations.

$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ . $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

$\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ ideal in $\mathcal{O}_0$. (local hol. fn near $x=0$)

$\Delta(t) =$ Alexander polynomial.

$\chi(t)$, $g(t)$. = 夫々, monodromyの固有多項式, 最小多項式.

$\mu$ : 一般に Milnor # $= \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^n$のとき).
ただし 第二章 §3 では ただの自然数.

$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}[s]$, $\mathcal{J}[s]$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ $\Omega^n$ などは 第一章 §1.

$m^{(i)}$ : monomial を表わすとき, その monomial の中である multiindex を表わすとき, がある.

$\boxed{ijk}$, $\boxed{ij}$ などで, δ関数を表わすときは $\boxed{ijk} = \delta^{(i)}(x)\delta^{(j)}(y)\delta^{(k)}(z)$,
一階の作用素で, 例 $f = x^i y^j z^k$ となるもの
をあらわすこともある. 混乱のおそれはない.

$L(f)$ p.16.

多項式の type.

$T_{(n);(m)}$ 第三章 §3. $_3T_{(m);2}$ 第三章 §4. 特に $T_{p,q,r}$ は Arnold の記号で, 第四章 §2. p.89..

# Introduction.

1. 超曲面のsingularityは色々な立場から興味をもたれ，さまざまな理論が知られている。その中でも，isolated singularityにかかわるlocal monodromy theoryにおいては、その主要結果を導くにあたり，解析学を深く用いている。一つの方法は，理論のabelian integralによる表現であり、今一つは，Gauss-Manin connexionとよばれる，ある種の常微分方程式を用いるものである。たとえば後者においては、それが，常微分方程式論でいうところの"regular singularity"になることが重要である。もとよりこの2つは別個のものではなく，関連しているわけだが，近年，この2つとも密接に関連し，かつ，より精密な理論と目されるものが登場した。それが，"超曲面のb函数"の理論である。佐藤幹夫，B. Malgrangeによってその端緒が開かれ，彼らならびに、柏原正樹，三輪哲二，河合隆裕によって発展させられつつあるこの理論の，より大きな発展のために，具体的裏付を行なうべく，さまざまな実例を提供することが，この論文の目的である。

このb函数とよばれるものは，実に古い歴史をもっている。それについて少しみてみよう。

2. M. Rieszは，基本解の構成にあたり，"解析接続"という着想をもちこんだ。たとえば，$|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$とするとき，

$$\Delta\left(|x|^2\right)^{s+1} = 4(s+1)\left(s+\frac{n}{2}\right)\left(|x|^2\right)^{s} \qquad (*)$$

は計算によりたしかめられる。

よってこれを

$$(|x|^2)^s = \frac{1}{4(s+1)(s+\frac{n}{2})}\Delta(|x|^2)^{s+1}$$

とみれば,

Re $s$ 十分大から初めて，次々と複素平面全体に $(|x|^2)^s$ が定義され，pole の位置も $-\mathbb{N}$，$-\frac{n}{2}-\mathbb{N}$ と決定される。従って，一般の多項式 $f(x)$ についても，$f^s$ の複素中の解析接続のためには，$b(s)$ という polynomial と diff. op. $P(x,D)$ で

$$P(x,D)f^{s+1} = b(s)f^s$$

という関係が成立すればよい．さらに，$P(x,D)$ は $s$ を parameter にしていてもよい．実際，任意の多項式に対し，そのようにできることを Бернштейн が証明した．[ ].

§3. (*) のような性質をみて，佐藤幹夫は，$|x|^2$ が直交群に関し不変であること． $\mathbb{R}^n-\{0\}$ は $GO(n,\mathbb{R})$ の orbit space となること

が本質的であることをみぬいた．1961年，彼は "Prehomogeneous vector space" の理論を創始し，ただちに，いくつかの主定理をえた。$(G,V)$ $G$: 代数群 V: 表現空間. $V \supset S$. Zariski closed set. $G$: $V\setminus S$ 上 線型 ベクトル transitive のとき，$(G,V)$ を prehomogeneous vector space とよぶ．それが，既約，正則 という条件をみたしていれば，$V$ 上の既約斉次多項式 $f(x)$ が唯一つ存在して，$(G,V)$ の相対不変式はすべて $cf^m$ の形になる．$S=\{f(x)=0\}$ により $V\setminus S$ が一つの $G$-orbit．さて dual space $V^*$ に，$G$ を adjoint 表現しておれば，$(G,V^*)$ も既約正則となり，その既約相対不変式を $P(y)$ $y\in V^*$ とすれば，

$$P(D)f^{s+1} = b(s)f^s$$

という式が成立し，ここに $b(s)$: polynomial.

このように，$b$ 関数は，初め prehomogeneous vector space において定義され，研究されたものであった。

4. 従って，我々の目的とするところは，

local holomorphic function $f(x)$ (near $x=0$)

に対して，

$$P(s,x,D)f^{s+1}=b(s)f^{s}$$

となる $b(s)$ を決定することである．当然，$b(s)$ としては次数の最も低いものをみつけたい。そして，$b(s)$ と $f(x)=0$ の $0$ での local monodromy との関連をしらべる．
$f$ : isolated では，上式において必ずしも $P(s)$ を決定する必要はない。$b(s)$ の計算のための方法をのべる．
$f$ : non-isolated でも，factor の候補者の決定，$b(s)$ の評価も含めて可能であり，$P(s)$ も構成しうるものがいくつかある。

$f$ : isol. sing.-fn では loc. monodromy との関連が完全に究明されたが，その一般化には，多くの困難が立ちはだかっている．

# 第一章　b函数の理論

## §1.　定義・基本性質

$\mathcal{O}$ : $\mathbb{C}^n$ の holomorphic fn の sheaf. x, 0 での stalk もあらわす.
$f \in \mathcal{O}$ ,　$\mathfrak{a} = \sum f_i \mathcal{O}$　$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$
$\mathcal{D}[s]$ : s を polynomial として含む, $\mathcal{O}$係数 differential operators の sheaf.　$\left( \sum_{j=1,\alpha}^{n} s^j a_{\alpha,j}(x) D^\alpha \right.$ の全体$\left. \right)$

$$\mathcal{J}[s] = \{ P(s) \in \mathcal{D}[s] \mid P(s) f^s = 0 \}$$

$$P(s) f^{s+1} = b(s) f^s \qquad \text{----} \quad (*)$$

となる non-zero $b(s)$ の存在は, Бернштейн の定理により保証されている. (cf. App. 1).

Def. 1　(*) となる $b(s)$ 達の $\mathbb{C}[s]$ における ideal の生成元で monic なものを, $f$ の $x=0$ における b 函数という.

$f(0) \neq 0$ なら,　$\frac{1}{f} \cdot f^{s+1} = f^s$ より $b(s) = 1$.
これは興味ないので, 以下 $\underline{f(0)=0}$ を仮定する。
$df(0) \neq 0$ なら, $f = x_1$ とおもってよいが,

$$D_1 x_1^{s+1} = (s+1) x_1^s$$

より　$b(s) = s+1$.
(*) より, b函数は, 半連続性をもつ. 即ち, $x=0$ の近傍の点 $y$ をとり, その点での b函数を $b_y(s)$ とすれば,

$$b_y(s) \mid b(s).$$

よって, 特に　$s+1 \mid b(s)$.

$b(s)$ の因子 $s+\alpha$ を決定する一つの十分条件として，次のものがある．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，何らかの $\mathcal{D}[s]$ module の section $\Delta(x) \neq 0$ が $[f\Delta(x)=0$, ${}^\forall Q(s) \in \mathcal{J}[s]$ に対し $Q(\alpha)\Delta(x)=0]$ を満足する $\Rightarrow$ $s+\alpha \mid b(s)$

$\because)$ (*) より $P(s)f - b(s) \in \mathcal{J}[s]$

$\therefore$ $(P(\alpha)f - b(\alpha))\Delta(x) = 0$ i.e. $b(\alpha)\Delta(x) = 0$.

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$$
$$\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]f^s/\mathcal{D}[s]f^{s+1} = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]+\mathcal{D}[s]f \quad \text{とおく.}$$

(*) $\Leftrightarrow$ $b(s)f^s = 0$ in $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ $b(s)$は $s \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ の min. poly.

$\mathcal{M}$ の PDE（偏微分方程式論）上の性質から，$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元である．よって Def. 1 において，$b(s)$ の定義に，Бер. の定理を根拠とする必要はない．PDE 的取扱いについては，ここではくわしくのべない．[ ] を参照せよ．

$b(s)$ の factor を決定するには，$s+1 \mid b(s)$ を考慮して

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s](s+1)f^s/(\mathcal{D}[s](s+1)f^s \cap \mathcal{D}[s]f^{s+1}) \hookrightarrow \mathcal{M}$$

を用いるのがよい．$s$ は $\mathcal{M}_0$ に作用する故，

$F = \Omega^n \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}_0$, $F^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt})$ 等に作用する．

$\mathcal{M}_0$ の PDE 上の性質から，$F, F^*$ は finite dim. vector spaces で，互いに dual である．

<u>Conj.</u> $f$: isolated sing.

$F$ (or $F^*$) における linear operator としての $s$ に対し，

$$\exp(2\pi i s) \approx (f=0 \text{ の } 0 \text{ での local monodromy})$$

両者の固有多項式の一致はわかっている.
F or F* における $s$ の最小多項式を $b_n(s)$ とすれば,

$$b(s) = (s+1)\, b_n(s). \qquad (\text{詳細は §3.4, [ ]})$$

$b(s) = (s+1)\prod(s+\alpha_j)$ として,

「(loc. monodromy の最小多項式) $= \prod(t - \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j))$」

というのは正しくない. $\alpha_j$ に整数差のものがあるとき, 注意せねばならない. たとえば $f = x^4+y^4$ では,

$$b_n(s) = (s+\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{3}{4})(s+1)(s+\tfrac{5}{4})(s+\tfrac{3}{2})$$

$$(\text{loc. m. min. poly}) = (t+1)(t+i)(t-1)(t-i) \qquad (= t^4-1)$$

$f$: non-isol sing のときについては 第五章をみよ.

## §2. 基本予想

$P(s) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} s^j a_{\alpha,j}(x) D^\alpha$ とかけるとき, $P(s)$ を高さ m 階である, という. さらに $\sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(x) D^\alpha \neq 0$ のとき, m 階であるという. このとき,

$$p_m(s, x, \xi) = \sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(x)\xi^\alpha$$

を, $P(s)$ の principal symbol という. $\mathbb{C}\times T^*X$ 上の函数である. $\sigma(P) = p_m$ などとかく.

$$P(s)f^s = 0 \implies \sigma(P)(f, x, df) = 0 \qquad \text{--- (0)}$$

は計算すぐ直ちに従うが, この逆が"ある程度"成立することが, $\mathcal{M}$ を PDE として調べる上で重要である. 詳細は [ ] にゆずり, 簡単に説明しよう.

$W = \{ (x, df(x)) \in P^*X \mid df(x)\neq 0\}$ の Zariski closure

$W_0 = \{ (x,\xi) \in W \mid f(x) = 0\}$ とおく.

$\mathcal{M}$ は PDE としては，$W_0$ 上のみが重要だといってよい．
さて，$W_0$ が $\mathcal{J}[s]$ から確定にきまるか？を問題にする．即ち，

$$\mathcal{J} = \{\, p(s,x,\xi) \mid (s,\xi) \text{ について hom. } p(f,x,df)=0 \,\}$$
$$\overline{\mathcal{J}(s)} = \{\, \sigma(P) \mid P \in \mathcal{J}[s] \,\}$$

とおけば，$\overline{\mathcal{J}[s]} \subset \mathcal{J}$ は(☆)よりわかる．これが一致するであろうとおもわれていたが，一般にはだめである．
(cf. ) 即ち，次の命題 $S_{\mathcal{D}}$ は false.

$$S_{\mathcal{D}} \quad p \in \mathcal{J} \Rightarrow {}^{\exists}P(s) \in \mathcal{J}[s] \ \text{s.t.}\ \sigma(P) = p.$$

そこで，$P^*X$ へもちあげて考えると，$S_{\mathcal{D}}$ の反例も，次の形の命題は満足する．これを基本予想とよんでいる．

基本予想 $S$ $\quad p \in \mathcal{J}$ のとき，$W_0$ の，ある proper analytic subset を除いた他の点 $(x,\xi)$ の近傍で，
${}^{\exists}P(s) \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{J}[s]$ s.t. $\sigma(P) = p$.
($\mathcal{P}$ $\mathcal{P}\otimes$ の意味はまもなくのべる)

たとえこの反例があっても，次の形で成立すれば，理論にはほぼ十分である．

$SK$ : ${}^{\exists}m_0$ ($f$ のみに dep)，$p$: $(s,\xi)$ につき hom. deg $= m \geq m_0$
$\Longrightarrow$ $S$ の結論成立．

(念のためのべておくと，$SK_{\mathcal{D}}$ : ${}^{\exists}m_0$, $\mathrm{hom}_{(s,\xi)}\deg p = m \geq m_0$
$\Longrightarrow {}^{\exists}P(s) \in \mathcal{J}[s]$ s.t. $\sigma(P) = p$
は false である。)

さて、$\mathcal{P}\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{J}[s]$ に関しては、本論文において、$\mathcal{P}$ を積極的に用いるわけではないので、簡単に説明しよう。

$\mathcal{P}$ は pseudo-dif. op. の sheaf とよばれ、$P^*X$ 上の sheaf of rings をなしている。 $P(x,D)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(x,D)$ $P_j$ は j 階の作用素という形をしており、0〜∞ までの項については、"infra exp" な増大度を仮定するが、$-\infty$〜0 については、寛大なる条件でよい。ここで、増大度などというときは、$\sigma(P_j)$ のそれをいう。

$P(x,D)=\sum_{j=-\infty}^{m} P_j(x,D)$ $P_m\neq 0$ の形のもの全体を $\mathcal{P}^f$ と記し、有限階の pseudo.dif.op. といい、$\sigma(P)=P_m(x,\xi)$ と symbol を定める。$P^*X \ni (x_0,\xi_0)$ の nbd で、$P_m(x,\xi)\neq 0$ ならば、実は $P(x,D)$ は $\mathcal{P}^f$ 内に逆元をもつ。

・$p(s,x,\xi)\in \mathcal{J}$ のとき、それを symbol とする $\mathcal{J}[s]$ の元はなくとも、$\xi_1 p(s,x,\xi)$ を symbol とする $\mathcal{J}[s]$ の元が存在するかもしれない。i.e. $D_1 p(s,x,D)+\cdots \in \mathcal{J}[s]$ となる i, $\xi_1\neq 0$ なるところでは、$D_1^{-1}$ を左から乗ずれば、$p$ をまさしく symbol とする $\mathcal{P}\otimes\mathcal{J}$ の元があることになる。一般に、〜〜のような事情があるため、基本予想 S において、$W_0$ から proper analytic subset を除かねばならないのである。(cf.

($\mathcal{P}$ についての詳細は S-K-K をみよ)

§ 3. quasi-hom. isolated case. (詳しくは三輪[ ]参照)

$f(x)$ : quasi-hom. (isolated sing. i.e. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$.)
i.e. $\exists$ vector field $X_0$. $X_0 f = f$.
(quasi-hom-fn については 参照)

$X_0 f = f$ より $X_0 f^s = s f^s$. 従って,

$$\mathfrak{M} = \mathcal{D}f^s / \mathcal{D}f^{s+1} = \mathcal{D}/\mathcal{J}' \qquad \mathcal{J}' = \{P \in \mathcal{D};\ Pf^s \in \mathcal{D}f^{s+1}\ \forall s\}$$

$\mathcal{J}_0 = \{P \in \mathcal{D};\ Pf^s = 0\}$ とおくと, 容易にわかるように
$\mathcal{J}' = \mathcal{J}_0 + \mathcal{D}f$.
又, isolated sing より, $\mathcal{J}_0 = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} \mathcal{D}(f_i D_j - f_j D_i)$
がわかる. (これは quasi-hom とは 関係ない.
$(f_1, \cdots, f_n)$ が $\mathcal{O}$-regular sequence であることによる.)
従って,
$$\mathfrak{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}f + \sum_{i,j} \mathcal{D}(f_i D_j - f_j D_i).$$

$b(s)$ は, 常に nonsingular part からの factor $(s+1)$ をもつ.
それを除去するため $b_n(s)(s+1) = b(s)$ とおく

$$\mathfrak{M}_n = \mathcal{D}(s+1)f^s / (\mathcal{D}(s+1)f^s \cap \mathcal{D}f^{s+1}) \subset \mathfrak{M}$$ とおくと,

$$\mathfrak{M}_n = \mathcal{D}/\mathcal{D}f_1 + \cdots + \mathcal{D}f_n$$ となる.

さて, $P \in \mathcal{D}$ に対し $s P(s+1)f^s = P(s+1)s f^s = P(s+1)X_0 f^s$
$= P \cdot X_0 (s+1) f^s$

つまり

$$\begin{array}{ccc}
s : \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathfrak{M}_n & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
(s+1) f^s & \longmapsto & X_0 (s+1) f^s
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n & \xrightarrow{s} & \mathcal{M}_n \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ \mathcal{D}/\sum \mathcal{D}f_i & \longrightarrow & \mathcal{D}/\sum \mathcal{D}f_i \\ \bar{1} & \longmapsto & X_0 \cdot \bar{1} \end{array}$$

では $s$ の作用は $\bar{1}$ を $\mathcal{D} \ni 1$ の class として.

ここで lemma. その前に, $\mathcal{B}_{pt}$ とは, 原点に support をもつ hyperfunction の全体 i.e. $\mathcal{D}\delta(x) = \mathcal{D}/\mathcal{D}x_1 + \cdots + \mathcal{D}x_n$.

lemma. $\{$原点に support をもつ coherent $\mathcal{D}$-module の category$\}$

$$\wr\!\wr$$

$\{$finite dim. vector space$\}$

covariant. $\mathcal{M} \longrightarrow \Omega^n \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = V$.

$V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{B}_{pt} \longleftarrow V$

contra. $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{pt})$

$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(V, \mathcal{B}_{pt}) \longleftarrow V$

$\quad \| $

$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{B}_{pt}$.

この lemma より, $s \in End_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_n)$ は $s \in End_{\mathbb{C}}(V)$ と考えてよい.

$$V = \Omega^n \otimes \mathcal{M}_n = \Omega^n / \Omega^n \mathfrak{a} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{a}.$$

ここで, 最後の同型によって, $s : \omega \longmapsto \omega X_0$ は

$s : \varphi \longmapsto X_0^* \varphi$ になる.

$$V = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_n, \mathcal{B}_{pt})$$
$$= \{u \in \mathcal{B}_{pt} \,;\, f_j u = 0 \ \forall j\} \qquad s : u \longmapsto X_0 u.$$

さてここで, Saito の定理を用いて

$$X_0 = \frac{1}{r} \sum r_i x_i \partial_i$$ としておこう.

すると, $X_0^* = -\left(X_0 + \frac{1}{r}\sum r_i\right)$

$s : x^\alpha \longmapsto X_0^* x^\alpha = \left(\frac{-1}{r}\sum r_i(\alpha_i+1)\right)x^\alpha$.

従って, $R = \left\{ \frac{1}{r}\sum r_i(\alpha_i+1) \;\middle|\; \{x^\alpha\} は \mathcal{O}/\mathfrak{a} の代表元 \right\}$ として

Theorem. $f$: quasi-hom. 座標変換して, weighted hom $(r; r_1 \cdots r_n)$ とすると,

$$b(s) = (s+1)\cdot \prod_{\beta\in R}(s+\beta).$$

semisimple であることは, 証明が少しかかってしまう.
実は三輪等により, 次の Trace formula が証明されており(*),
計算には都合のいい方を用いれば良い.

Theorem. $f$: weighted hom $(r; r_1, \dots, r_n)$

$-S$ の固有値 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$  $\mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$

$$\Rightarrow \sum_\nu t^{r\beta_\nu} = \frac{(t^{r_1}-t^r)\cdots(t^{r_n}-t^r)}{(1-t^{r_1})\cdots(1-t^{r_n})}$$

従って, この右辺を展開して $\sum g_j t^j$ とすれば,

$$固有多項式 = \prod \left(S+\frac{j}{r}\right)^{g_j}$$

$$b(s) = (s+1)\cdot \prod_{g_j\neq 0}\left(s+\frac{j}{r}\right)$$

(*) この Theorem Bourbaki Lie Alg. からただちに従う, という説もある.

§4. non-quasi-hom. での $\mathcal{J}[s]$ の決定と $b(s)$ の求め方.

$b(s)=(s+1)\cdot b_1(s)$ と, §.3 と同様におく. 今度は $s$ は消去されないが,

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s](s+1)f^s \Big/ \left(\mathcal{D}[s](s+1)f^s \cap \mathcal{D}[s]f^{s+1}\right)$$

$$= \mathcal{D}[s] \Big/ \mathcal{J}[s] + \mathcal{D}[s]f + \sum \mathcal{D}[s]f_i .$$

以下 $f$: isolated sing は常に仮定.

$\mathcal{J}[s] = \{ P_0(x,D)s^l + \cdots + P_l(x,D) \}$ の generator を決定.

証明ぬきで事実を列挙すると,

Prop. 1. $l=0$ の generator は $f_iD_j - f_jD_i$ である.

Prop. 2. $(\Omega:(f)) = (a_0^1(x), \dots, a_0^r(x))$ とすれば,

$$a_0^\nu(x)f + \exists\, a_i^\nu(x,df) = 0.$$

$$\therefore\ \underbrace{a_0^\nu(x)s + a_1^\nu(x,D)}_{} \in \mathcal{J}[s].$$

$l=1$ なものは, このようにしてもとにたち一でつくされる.

一般的処理はこれ以上きかない. 今, $s^2+sA+B \in \mathcal{J}[s]$ と仮定しよう. そうすれば, $s$ の高次は消去され, Prop. 1.2 でえたものと, この二階のものとで $\mathcal{J}[s]$ が生成される.

さらに, $\mathcal{J}[s] = (s^2 - sA - B,\ xs - X,\ ys - Y)$ と仮定しよう. (二変数)

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s] \Big/ \mathcal{J}[s] + \mathcal{D}[s]f + \mathcal{D}[s]f_x + \mathcal{D}[s]f_y \quad \text{となる}$$

$\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{D}$-module として $1, s$. で生成される.

Prop. 3. $\mathcal{D}u \oplus \mathcal{D}v \longrightarrow \mathcal{M}_0$

$(Pu, Qv) \longmapsto P + Qs$

の Kernel は, $\left\{ \begin{array}{l} xv - Xu,\ yv - Yu,\ fv\ f_x v\ f_y v \\ \qquad\qquad\qquad\qquad fu\ f_x u\ f_y u \end{array} \right\}$ ⊛

で生成される。

これにより, $b(s)$ の計算法がわかる.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt}) = \left\{ \binom{u}{v} \in \mathcal{B}_{pt}\ ;\ ⊛ \right\}$.

即ち, $\begin{array}{ll} fu = f_x u = f_y u = 0 \ \text{—①} & xv = Xu \\ fv = f_x v = f_y v = 0 \ \text{—②} & yv = Yu \end{array} \Big)$ ③.

手続としては, まず①をみたすように $u$ をとり, ③をみたすように $v$ を定める. compatibility condition $xY - yX \in \mathcal{D}(f_x\partial_y - f_y\partial_x)$ がみたされているかぎり, $v$ は mod $\delta(x,y)$ で unique.

すると, 容易にわかるように $f_x v = f_y v = 0$ となる. 又, $S^2 - SA - B$ の存在から $fv = 0$ がわかる.

$u$ としては $\mu - 1$ 個の $\mathcal{O}/\mathcal{O}\partial f$ の代表元をとり, $v$ を決定し, 最後に $\binom{0}{\delta(x,y)}$ をつけ加えて ちょうど $\mu$ 個になる.

さて, $u, v$ の意味より, $\left( \begin{array}{l} su = v \\ sv = Av + Bu \end{array} \right.$

$\therefore\ s\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} & 1 \\ B & A \end{pmatrix}\binom{u}{v}$ となって, $s$ の作用がわかる.

あとは行列の計算. $e_1 = \binom{0}{\cdots}$ …… $e_\mu = (\ \ )$ について,

$s$ を行列表示すればよい.

$\Omega \dot{\otimes} \mathfrak{m}_0$ でするなら，Prop. 3 の 8個をみて

$$0 \leftarrow \mathfrak{m}_0 \leftarrow \mathcal{O}^2 \leftarrow \mathcal{O}^8$$ という resolution から

$$0 \leftarrow \Omega \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathfrak{m}_0 \leftarrow (\Omega^n)^2 \leftarrow (\Omega^n)^8$$ となって，だいたい

$\mathcal{O}^2$ の quotient space として求まった空間ですればよい。

$$\Omega \otimes \mathfrak{m}_0 = \mathcal{O}^2 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ -x^* \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} y \\ -y^* \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} f_x \\ 0 \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} f_y \\ 0 \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \end{pmatrix}\mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_y \end{pmatrix}\mathcal{O}$$

$$= (\mathcal{O}/\mathfrak{a}')^2 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ -x^* \end{pmatrix}(\mathcal{O}/\mathfrak{a}') + \begin{pmatrix} y \\ -y^* \end{pmatrix}(\mathcal{O}/\mathfrak{a}') \qquad \mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + (f)$$

$$= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus (\mathcal{O}/\mathfrak{a})(yx^* - xy^*)(\mathcal{O}/\mathfrak{a}').$$

計算処理をどうするかは好みだが，quotient より subspace の方が安心してできる。

この決定法から次のことがわかる。その前に，

$$\mathrm{Coim}\,(\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}/\mathfrak{a}) = \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$$
$$\mathrm{Coker}\,(\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}/\mathfrak{a}) = \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$$ より

$$\mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a} = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f + \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f.$$ に注意せよ。

$u$ としてとりうるのは一般に $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$ 個，$\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ の形でとりうるのが $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ である。ということは，

Prop. 4. $\mathcal{J}[s] \ni s^2 - sA - B$，とすると，

$b(s)$ にせいぜい double factor しか含まず，しかも含むとしてもその個数は $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ 個以下である。

$L(f)=2$ における注意.

$f$: isolated non-quasi-hom. のとき、一般には $\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt})$ が $\mu$ であるかどうかわからない. だが, $L(f)=2$ においては確認されている.

$L(f)=2 \iff$
1. $f \notin \mathfrak{a}$ $\quad (\iff \mathrm{Hess}\, f \in \mathfrak{a}+f)$
2. $\exists p(s,x,\xi) = s^2 + (\sum a_i \xi_i)s + \sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ s.t. $p(f,x,df)=0$.
3. その $(a_{ij})$ について, $\sum a_{ij} f_{ij} \in \mathfrak{a}+f$.

このとき, 2. 3. を用いて, $\exists P(s) = s^2 + A(x,D)s + B(x,D)$
$P(s)f^s = 0$, $\sigma(P)=p$ となるのであった.

**Theorem** $\quad L(f)=2 \Rightarrow \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt}) = \mu$.

特に, ($s$の表現行列) $= S+N$ $\quad S$: semisimple $N$: nilpotent
としたとき, $N^2=0$. 又, nilpotent つき Jordan block は, あったとしても, 高々 $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ 個である。

この部分, ある条件をつけないと厳密にはまだ示せていない.

Proof) $\mathcal{J}[s]$ は $f_iD_j - f_jD_i$, $a_\nu(x)s - a'_\nu(x,D)$, $s^2 - As - B$
により生成される. ここに $\{a_\nu(x)\}$ は $\mathfrak{a}:f$ の basis であり,
$a_\nu(x) f = \sum a_{\nu,j}(x) f_j$ のとき, $a'_\nu(x,D) = \sum a_{\nu,j}(x) D_j$ と
求めたのであった. 従って, (cf. $\qquad$ )

$$a_\mu(x)\, a'_\nu(x,D) - a_\nu(x)\, a'_\mu(x,D) \in \sum \mathcal{D}(f_iD_j - f_jD_i) \qquad (*)$$

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s] \big/ \mathcal{J}[s] + \mathcal{D}[s]f + \sum \mathcal{D}[s]f_i = \mathcal{D}\cdot 1 + \mathcal{D}\cdot s$$

$$\left( = \mathcal{D}[s](s+1)f^s \big/ \mathcal{D}[s](s+1)f^s \cap \mathcal{D}[s]f^{s+1} \right)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_{pt}^2 \;\middle|\; f_i\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,\ f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,\ a_\nu(x)\, v = a'_\nu(x,D)\, u \right\}$$

ここで $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} f^s \\ sf^s \end{pmatrix}$ に対応してとった.

$$s\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$ が $s$ の作用である。

$f_i u = fu = 0$ をみたす $u \in \mathcal{B}_{pt}$ をとる. $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$ 個ある. (*) により, 方程式 $a_\nu(x)\, v = a'_\nu(x,D)\, u$ は解ける. 直前に述べた $u$ に対しての1つ以外に, $u=0$ に対する解が $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ 個ある. (個数はいずれも独立なものの数をいっている) これらの $v$ が, $f_i v = fv = 0$ をみたせば,

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$ 個, $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ 個 $\mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f + \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$

より, 定理前半は従う. $A(x,D) = \sum a_i(x) D_i$ $B(x,D) = \sum a_{ij}(x) D_i D_j$ としよう. $\sum a_{ij} f_{ij} \in \mathfrak{a}+f$ に注意せよ.

$$f_i(sf^s) = (D_i f - f_i) f^s$$
$$f(sf^s) = \left\{ \sum a_i(x)(D_i f - f_i) + \sum a_{ij} D_j f_i - \sum a_{ij} f_{ij} \right\} f^s$$

がわかる. 第二式で, $s^2 - A(x,D)s - B(x,D)$ を用いた。

$u$ を $f^s$ とおもうとき, $v$ が $sf^s$ であるから, これより $f_i v = fv = 0$ が, $f_i u = fu = 0$ から従う.

後半.

$f^2 \in \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}f$ $\therefore$ $\mathfrak{a}+f \subset \mathfrak{a}:f$. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt})$ の basis $\{e_i\}$ を $e_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ で次のようにとる. $1 \le i \le 2m$ $m = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ では

$e_{2j-1} = \begin{pmatrix} u_{2j-1} \\ v_{2j-1} \end{pmatrix}$ $e_{2j} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{2j} \end{pmatrix}$ $u_{2j-1} = v_{2j}$. $1 \le j \le m$.

$i > 2m$ では $e_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ この $u_i$ は, 従って $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}+f - \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ 個.

初めの $m$ 個の pairs から, nilpotent つきがおこりうる. しかし, 現在, ある条件をつけないと, 厳密に示してないので, これ以上は省略する. ■

§5. $\mathcal{J}[s]$ の具体的決定に関して.

$a(x)s + X$ 形は §4. にあったように,
$a \in \mathcal{O} : (f)$ から作ったものにかぎられる.

同様に今 $a \in \mathcal{O}^2 + \mathcal{O}f : f^2$ とせよ. 即ち
( $\mathcal{O}^2+\mathcal{O}f / f^2 \supset \mathcal{O} : f$ より, quotient の代表として取ればいい)

$$af^2 + \left(\sum^3 a_i f_i\right) f + \sum^3 a_{ij} f_i f_j = 0 \quad \text{—①}$$

この $a_{ij}$ に対して,

$$\sum a_{ij} f_{ij} + \sum b_i f_i + bf = 0 \quad \text{—②} \qquad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

となるような $b_i$, $b$ が求まったとせよ. そのとき,

$A = -\sum a_i D_i + a - b$

$B = -\sum a_{ij} D_i D_j + \sum (a_i - b_i) D_i$ とおくと,

$as^2 - sA - B \in \mathcal{J}[s]$ であることがわかる.

又, 逆も成立するので,

$p_2(s, x, \xi) = as^2 + \left(\sum a_i \xi_i\right) s + \sum a_{ij} \xi_i \xi_j$. として.

**Prop.** $p_2(f, x, df) = 0$ のとき, $\sigma_2(P) = p_2$ となる2階の作用素の存在する必要十分条件は

$$\sum a_{ij} f_{ij} \in \mathcal{O} + (f).$$

後にこの Prop を用い, $p_2(f, x, df) = 0$ であるのに, それを principal symbol にする作用素の存在しないことがあるのを示す. (p.　　　)

次に $as^3 + \cdots$ について考えてみよう.

$as^3+\cdots$ の求め方の一つ.

$a \in \mathfrak{a}f^2+\mathfrak{a}^2f+\mathfrak{a}^3 : f^3$ とせよ. それによりまず

① $\sum \underline{a_{ijk}}\, f_i f_j f_k + (\sum \underline{a_{ij}}\, f_i f_j) f + (\sum \underline{a_i} f_i) f^2 + a f^3 = 0$.

次に $b_{ij}$ と $b_i$, $b$ をなんとかもとめる.

② $\sum a_{ijk}(f_i f_{jk} + f_j f_{ki} + f_k f_{ij}) + \sum \underline{b_{ij}}\, f_i f_j + (\sum \underline{b_i} f_i) f + \underline{b} f^2 = 0$

これがもとまったら $c_i$ と $c$ をもとめ?

③ $\sum a_{ijk} f_{ijk} + \sum b_{ij} f_{ij} + \sum \underline{c_i} f_i + \underline{c} f = 0$

もう一つ修正に

④ $\sum a_{ij} f_{ij} + \sum \underline{d_i} f_i + \underline{d} f = 0$.

これが全部求まったとする.

そして $P(s) = as^3 - As^2 - Bs - C$

$$\equiv \sum a_{ijk} D_i D_j D_k + (s-2)\sum a_{ij} D_i D_j + (s-2)(s-1)\sum a_i D_i$$
$$+ s(s-1)(s-2)a + \sum b_{ij} D_i D_j + (s-1)\sum b_i D_i$$
$$+ s(s-1)b + \sum c_i D_i + sc + (s-2)\sum d_i D_i + s(s-2)d$$

とおく. 即ち

$$\begin{cases} A = -\sum a_i D_i + (3a-b-d) \\ B = -\sum a_{ij} D_i D_j + \sum (3a_i - b_i - d_i) D_i + (-2a+b-c+2d) \\ C = -\sum a_{ijk} D_i D_j D_k + \sum (2a_{ij} - b_{ij}) D_i D_j + \sum (2a_i + b_i - c_i + 2d_i) D_i \end{cases}$$

すると $P(s) f^s = 0$. $\sigma(P(s)) = as^3 + (\sum a_i \xi_i) s^2 + (\sum a_{ij} \xi_i \xi_j) s + \sum a_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k$

上でわかるように ④ から $\sum a_{ij} f_{ij} \in \mathfrak{a}+f$ それに, ② で求めた $b_{ij}$ に対して, ③ $\sum a_{ijk} f_{ijk} + \sum b_{ij} f_{ij} \in \mathfrak{a}+f$ などが, $P$ の存在の必要条件になってくる.

しかし, 一般にこのような求め方では能率が悪い. 個々の場合に色々工夫すべきである.

次の命題は，しばしば便利である.

作用素として，$x_iD_i$ の式になっているものに制限する

$xD$ とは $(x_1D_1,\dots,x_nD_n)$ の略記. $xD-\alpha$ とは $(x_1D_1-\alpha_1,\dots,x_nD_n-\alpha_n)$ の略記. 又，$R(s,x,D)$ に対し，$R^{(\nu)}$ とは

$$R(s,x,D)=\sum a_\alpha D^\alpha \qquad R^{(\nu)}=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\left(\sum a_\alpha\xi^\alpha\right)\right]_{\xi\mapsto D}.$$

Prop. $$P(s,x,xD)f^s=p(s)x^\alpha\varphi(x)f^{s-l}$$
$$Q(s,x,xD)f^s=q(s)x^\beta\psi(x)f^{s-m}$$

$$\Rightarrow.\quad Q(s-l,x,xD-\alpha)P(s,x,xD)f^s$$
$$=p(s)q(s-l)x^{\alpha+\beta}\varphi\psi f^{s-l-m}+\psi(x)x^\alpha\sum_{|\nu|>0}\frac{D^\nu\varphi}{\nu!}\left(Q^{(\nu)}(s-l,x,xD)f^{s-l}\right)$$

証明は容易.

## §6. 予想 $K_{dec}$ と $L(f)$

予想Kは，$\exists s^l + \cdots \in \mathcal{D}[s]$ を主張するが，さらに精密に，次の予想 $K_{dec}$（主部の分解に関する柏原の予想）がある。

予想 $K_{dec}$ $\quad \exists P(s)$ $l$階 $\in \mathcal{D}[s]$ s.t.

$$P(s)=\prod_{i=1}^{l}(s-a_i(\vartheta)) + \sum_{j=1}^{l} A_j(x,D)s^{l-j}.$$

$\vartheta=(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_n)$ $\quad \vartheta_i = x_iD_i$ $\quad$ ① $a_i(\vartheta)=\sum a_{ij}\vartheta_j - c_i$

② $A_j(x,D)$ は higher order*

③ $c_i \geq 0$ rational number

④ $a_{ij}\geq 0$ 〃

又は ( ③′ $c_i$ : rational , $a_{ij}$ rational.
④′ $a_i(\nu_1,\cdots,\nu_n)<0$ if $\nu_1\leq -1,\cdots,\nu_n\leq -1$. )

この予想にいたる経過は次の通りである。佐藤は，link $S_I$ に関する計算で，2階の作用素がこのようになることを示した。柏原は，始め，この形の $c_i=0$ のものを予想した。それが成立するとすれば，全てありうべきよき状況のおこることがらである。(e.g. $b(s)$の根のstrict negativity) $\frac{1}{4}(x^4+y^4+z^4)-xyz$ において，当初主部は分解されそうになかったが，柏原は，分解できるように修正できることを示した。その後，三輪の例にもとづき，矢野は一般に $c_i$ を入れるべきことを主張し，結局 ①②③′④′ をもって予想とすることになった。

higher order の解釈は，当初は $A_j(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq j} a_\alpha D^\alpha$ $\quad a_\alpha \in m^{|\alpha|+1}$ であったが，佐藤と矢野は，"$\{a_i(\vartheta)\}$ に即して higher order である" 即ち

* これの解釈は下でのべる。

s を 0 次

「∀i について，$x_k^{\theta}$ を $a_{ik}$ 次，$D_k$ を $-a_{ik}$ 次とおもったときに，$\sum_{j=1}^{N} A_j(x,D)s^{N-j}$ のどの項も strict に正の次数をもつ」* とすべきであろうと主張した。
その後，矢野は，③′④′を，③④にまで弱めてよいであろうと予想した。（以上）

かくも長き生命をもつ予想であるが，現在のところ，ともかく反例はない。

Prop. 予想 $K_{dec}$ ⇒ $b(s)$ の根は ${}^{\exists}(\nu_1\cdots\nu_n) \in \mathbb{N}^n, {}^{\exists}i,$
$-(\sum a_{ij}\nu_j + c_i)$ という形.

これは容易.
この $a_i(\nu)$ はかなり canonical に決定されるとおもう.
（$l$ 十分大のとき） 以下 $\sum a_{ij}\nu_j = X_i$ とかく.
第三章 §2 において，simplex type function に対しては，$X_i$ がどのようにとればよいか示してある。
さて，$K_{dec}$ が成立したとしよう。このとき，
$s^l + \cdots \in b[s]$ となる最小の $l$ に対しても，$X_1 \cdots X_l$ によって，分解された主部をつくれるであろうか？というと否定的である。（$T_{p,q,r}$ etc）一般に，

$$(s-Y_1+c_1)\cdots(s-Y_l+c_l)+\cdots$$

と，なったとき，$Y_i$ はどの $X_j$ とも異なりうる．つまり，$f$ に associate した standard な $X_1 \cdots X_l$（他にも standard なものあり）に対して，complemental な operators が必要となる.
（$l$ より下の，$a(x)(s-Z_1+c_1)\cdots$ のところでも，complemental が必要になる）complemental operators が，どのようなものでありうるか，についても色々わかっている。

* この定義，もっともなところもあるが，一般には，かなり座標変換してやらないと，うまくいかないおそれがある

ともかく，Kdec から，$b(s)$ の根の様子はわかる。operators については，あまりわからない．特に，$b(s)$ の multiple factors の決定には，$s^l + \cdots \in \mathfrak{J}[s]$ となる最小の $l$ を決定すべきことが多い．

Def. $s^l + \cdots \in \mathfrak{J}[s]$ となる最小の $l$ を $L(f)$ と記す．

symbol の段階で，i.e. $f^l \in \mathfrak{a}^l + \mathfrak{a}^{l-1} f + \cdots + \mathfrak{a} f^{l-1}$ となる最小の $l$ は，$L'(f)$ と記すことにする。 $L'(f) \leq L(f)$ $L'$が

Appendix 4 によれば $\underline{L'(f) \leq \mu}$ if $f$: isol. sing. poly.

とこの加藤の方法に従えば， $f$: polynomial のとき，

$\exists \theta_1, \cdots, \exists \theta_n$ vector fields s.t.

$$\frac{\partial(\theta_1 f, \cdots, \theta_n f)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \not\equiv 0 \text{ near } x = 0 \quad \text{（とすれば，}$$

$\mathbb{C}^n_x \longrightarrow \mathbb{C}^n_y$

$x \longmapsto (\theta_1 f, \cdots, \theta_n f)$ は generically surjective.

そこで generic point $y$ の fibre の個数を $l$ とすれば，

$L'(f) \leq l$ がわかる。特に，$X_i = \partial_i$ とすれば，

Prop. $f$: polynomial (not nec. isol. sing)

Hess$(f) \not\equiv 0$ near $0$

$\Longrightarrow$ $x \longmapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ の generic point の fibre の個数を $l$ とすれば， $L'(f) \leq l$.

第三章において，$f$: simplex type のとき，予想 Kdec の成立とともに，$L(f)$ の評価を行う方法を示してある。

$b(s)$ が monodromy の最小多項式と一致するとすれば，

Prop′. $L(f)\leq d$ のとき, monodromy 行列 $M=S+N$ (S: semisimple N: nilpotent) としたとき, $N^d=0$

Malgrange の $nT_{(2n+2);(2)}$ については $L(f)=n$. (cf. 第三章§3) として $N^{n-1}\neq 0$. $N^n=0$.

quasi-hom とは, $L(f)=L'(f)=1$ のことであって, monodromy は semisimple であった.

色々な問題が生ずる.

- non-quasi-hom のとき, いかなる条件のもとで $L(f)=2$ ?
- 又, $L(f)\geq 3$ の判定条件は? (いいものをさがす. cf. Appendix 3)
- $n$ 次元で $L(f)<n$ となる条件は?
- 現在のところ, $L(f)=L'(f)$ だが, 一般に正しいか?

読者も, 以下のさまざまな例をみて考えられよ.

さらに又, 少し前にもどって, $L(f)$ 階の作用素で, 主部の分解したものをとるとき, 本質的にことなるものが何種かあらわれることがある. (cf. type M in 第二章 §2. 第二章 §4 の例1) この事情はどう説明すべきか.

$\mathfrak{n}:f=\mathfrak{m}$ ということと, 関係があると思っているが, そのようなことは, $\mathfrak{n}:f=\mathfrak{m}$ のときのみ起こるのか?

又, $n$ 次元の場合, complemental operators が $L(f)$ 階のものにあらわれることと, $n>L(f)$ との関係は?

$\mathfrak{n}:f$ が $n$ 個で生成されれば $L(f)\leq n$ ?

以下をすべてよまれたら, この§をよみかえしていただきたく思う.

# 第二章　2変数における ζ函数.

2変数におけるmonodromyは，昔から知られていたAlexander polynomial, Alexander matrixによりすべてわかり，(但し成分2以上の場合Foxの走郭と理論による) 色々詳しいことも知られており，実例の検証によい．monodromy theoryの結果と，我々の $\zeta(s)$ の，色々な場合における計算を以下にします．

## §1. monodromy theoryより.

まず，2変数においては，isolated sing. であっても，irreducibleとはかぎらぬことに注意せよ． $S_\varepsilon \cap \{f(x,y)=\varepsilon\}$ はlinkであるが，これがiterated torus knotといわれるもののみによってなっていることは，かなり昔から知られていた。monodromyの固有多項式，最小多項式は，Alexander matrixを経由してもとめられるが，他にも色々な方法で可能である。

### 1. irreducible case.

Theorem1 (Lê Dũng Tráng) $f(x,y)$ : analytically irreducible at $(0,0)$ $\Longrightarrow$ monodromyはfinite order.

(i.e., monodromy matrixは，何乗かするとidentity matrix)

この場合，$\underset{\Delta(t)''}{\text{Alexander polynomial}} =$ monodromyの固有多項式

そして，これが容易にもとまる.

$\mathrm{ord}_0(f(0,y)) = \mathrm{ord}_0 f(x,y) = N$ とすれば、$\exists \varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$

$f(x, \varphi(x^{1/N})) = 0$ であるが、ここで Puiseux series を

明ゆにかくときに、分数ゆの分母は、必要になってあらわして

かくことにする。即ち

$$\varphi(x^{1/N}) = \sum_{i=0}^{k_1} a_{1i} x^{\frac{m_1+i}{n_1}} + \cdots + \sum_{i=0}^{k_{g-1}} a_{g-1,i} x^{\frac{m_{g-1}+i}{n_1\cdots n_{g-1}}} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{g,i} x^{\frac{m_g+i}{n_1\cdots n_g}}$$

もちろん $N = n_1 \cdots n_g$. とりかた $(m_j, n_j) = 1$.

このときに、characteristic index of $f = g$.

$f$ の ch. pairs $\left\{ \binom{m_1}{n_1} \cdots \binom{m_g}{n_g} \right\}$ という。

$\lambda_1 \cdots \lambda_g$ を次の式で inductive に定義する。~~ ~~

$$\lambda_1 = m_1, \quad \lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_i n_{i-1}$$

そこで、$P_{\lambda,n}(t) = \dfrac{(t^{\lambda n} - 1)(t-1)}{(t^{\lambda}-1)(t^n-1)}$ とおくと、

**Theorem 2** $\Delta(t) = \prod_{i=1}^{g} P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_{i+1}\cdots n_g})$

example. $2 \leq p < q$ $(p,q)=1$. $mp = nq+1$ と $m, n \in \mathbb{N}$ をとり、

1\. $Y(p,q)$ $(x^q - y^p)^q - x^m y^{pq-n} = 0$ とすれば ch. pairs $\left( \binom{q}{p} \binom{q^2+1}{q} \right)$

2\. $S(p,q)$ $(x^q - y^p)^p - x^m y^{p^2-n} = 0$ とすれば ch. pairs $\left( \binom{q}{p}, \binom{pq+1}{p} \right)$.

$$\Delta_1(t) = \frac{(t^{pq^2}-1)(t^{(pq^2+1)q}-1)(t-1)}{(t^{q^2}-1)(t^{pq}-1)(t^{pq^2+1}-1)} \qquad \mu = q(q-1)\{(q+1)p-1\}$$

$$\Delta_2(t) = \frac{(t^{p^2q}-1)(t^{(p^2q+1)p}-1)(t-1)}{(t^{pq}-1)(t^{p^2}-1)(t^{p^2q+1}-1)} \qquad \mu = p(p-1)\{(p+1)q-1\}$$

3\. $\{(x^3-y^2)^2 - x^2y^3\}^3 + (x^3-y^2)^4 y^4 = 0$ とすると、

ch. pairs $\left( \binom{3}{2}, \binom{7}{2}, \binom{15}{2} \right)$. $\Delta(t) = \dfrac{t-1}{t^8-1}(t^{12}+1)(t^{26}+1)(t^{53}+1)$

$\mu = 84$.

Theorem 3 (A'Campo) $f(x,y)$ の ch. index $\geq 2$

$\Longrightarrow$ geometric monodromy は finite order ではない。

(i.e. geometric monodromy を何回 iterate しても id に isotope でない)

即ち，geometric には，複雑なことがおこっている。

ch. index $= 2$ での $b(s)$ の例は p. 　をみよ

## 2. reducible case.

この場合，Fox による方法が一般に用いられる。要するに，Alexander matrix を，link に拡張したものである。詳細は Fox [14] をみよ。一般に monodromy の固有多項式 $= \chi(t)$ ($\overset{\text{or}}{=} \delta(t)$)

monodromy の最小多項式 $= g(t)$ とかく。

最も簡単な(nontrivialな) link $(x^2+y^3)(x^3+y^2)$ において

torus knotを用いた

すでに $g(t)=(t^5+1)(t^2-1)$ となり $t=-1$ が double. 成分をふやしてやると，knot していない 4個の $S^1$ の link しただけの $xy(x+y^2)(x^2+y)$ でも

$g(t)=(t^6-1)(t+1)$ となり $t=-1$ が double.

これらについての $b(s)$ の一般論は §3 をみ. 個別の例については p. 44〜46 をみよ.

4個の knot している $S^1$ と，(2,3) knot の link である

$(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$ では，A'Campo の方法で

$\chi(t)=(t-1)(t^8-1)(t^9-1)(t^{10}-1)$ とわかっており，

$b(s)$ の全根を求めることは興味深いが，計算未済.

尚，A'Campo の resolution を用いる方法で

$(x^m+y^n)(x^n+y^m)$ の $\chi(t)$ を決定する方法は 堀川 [19].

☆ もう少し補足しておく.

$k$: knot に対し, $\pi_1(S^3-k)$ は $k$ の knot group といわれるが, torus knot (より広いあるclassでいいが) の場合, 次の定理が知られている.

Theorem. 4 $\pi_1(S^3-k)$ の comutator group を $G'$ とすれば

$G'$ は free, finitely generated.

しかも rank $G' = \mu$ (Milnor #)

又, $\mu$ を parametrization から決定するにはこの方法が便利.

$$\begin{cases} x = t^{a_0} \\ y = \lambda_1 t^{a_1} + \lambda_2 t^{a_2} + \cdots \qquad \lambda_i \neq 0. \end{cases}$$ として,

$D_j = g.c.d. \{a_0, \cdots, a_{j-1}\}$ とおく. $a_0 = D_1 \geq D_2 \geq \cdots \geq D_k = 1$ (各 $k$)

このとき, $\boxed{\mu = \sum_{j \geq 1} (a_j - 1)(D_j - D_{j+1})}$

reducible case で, 原点での double pt の個数 $\delta$

branch の個数 $r$ とすれば

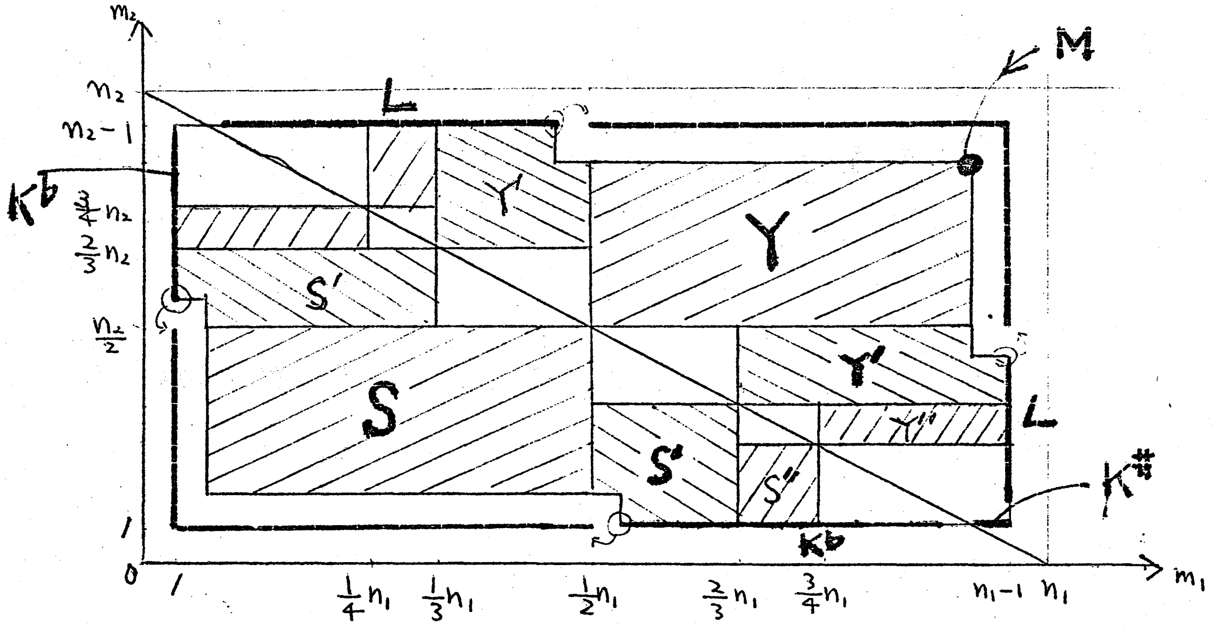
Theorem 5 (Milnor !) $\quad 2\delta = \mu + r - 1$.

従って, Cor. 6 $\begin{cases} r : \text{even} \Rightarrow \mu : \text{odd} \\ r : \text{odd} \Rightarrow \mu : \text{even}. \end{cases}$ !!

## §2. 2変数 quasi-hom-poly. の 1-parameter deformation における, $b(s)$.

2変数 q-h-p. の代表型は I. $x^{n_1}+y^{n_2}$. II $x(x^{n_1}+y^{n_2})$
III. $xy(x^{n_1}+y^{n_2})$. これに $tx^{m_1}y^{m_2}$ を加えて, 状況をしらべる. 尚 $S_{\mathrm{I}}$ $S_{\mathrm{II}}$. $S_{\mathrm{III}}$ は　　の link 式表示と重複する.
尚, これらについては b:f は完全に決定されている. (1974. 10月)

I. $\dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-tx^{m_1}y^{m_2}$




monomial $x^{m_1}y^{m_2}$ の $(m_1, m_2)$ は上の図からとる.
主対角線より上は $x^{m_1}y^{m_2}$ が高次. 下では低次.
$m_1=1$ or $m_2=1$ で 低次のものを $K^\flat$. 高次のものを $K^\sharp$.
$m_1=n_1-1$ or $m_2=n_2-1$ のものを L. $m_1=n_1-2$ $m_2=n_2-2$ を M.
ただし 右上 ⅂ と左下 L は quasi-hom なので名前はつけない. Y の他 S. Y. S′, Y′ などとつける.
II. III と区別するときは, $S_{\mathrm{I}}$ などと I をそえる。
$m_1=n+1$. $n_2=n$. $m_1=n$ $m_2=1$ という $K^\sharp$ を特に K という.

(1) 概説.

主対角線より上では $\mu = (n_1-1)(n_2-1)$ で雑にいって一つの作用素 $X_0$ が支配する. $\boxed{X_0 = \frac{1}{n_1}xD_x + \frac{1}{n_2}yD_y}$

下では $\mu = (m_1-1)n_2 + (m_2-1)n_1 + 1$ であり, 二つの作用素 $X_1, X_2$ があって, $m_1 = 1$ では $X_2$ $m_2=1$ では $X_1$

$(m_1-1)(m_2-1) \neq 0$ では $X_1, X_2$ の2つともが支配する.

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{m_1 n_2}\{(n_2-m_2)xD_x + m_1 yD_y\} \\ X_2 &= \frac{1}{m_2 n_1}\{m_2 xD_x + (n_1-m_1)yD_y\} \end{aligned}}$$

即ち, $\underline{\underline{c = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} - 1}}$ をみて, $c>0 \Rightarrow X_0$, $c<0 \Rightarrow X_1, X_2$.

$c=0$ ならもちろん weighted hom.

$\exists \Delta^{\ell} + \cdots \in \mathfrak{g}[S]$ となる $\ell$ は $S$, $Y$ では $2$.

$S'$, $Y'$ で $3$. $S''$ $Y''$ で $4$

一般に $\min(n_1, n_2)$ とまで評価される. もちろん実際により小なる $\ell$ でとれることがある.

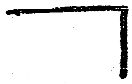
$S$ は link 式表示で佐藤が初めて計算した.

$K^{\flat}$ $K^{\sharp}$ は Arnold の $K_{12} \sim K_{14}$ ともあうが, 特に $\bar{K}$ の重要性に注目し, いくつか計算した程度に止まる.

$M$ は, 特に三輪が着目したもの(の一般化)であり, 興味ある事態が発生する. $Y$ は筆者の頭文字より.

$L$ は $K$ と $M$ の間としてつけた.

(ii) quasi-hom になるもの.

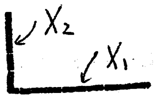


例として、 $\frac{x^{n_1}}{n_1}+\frac{y^{n_2}}{n_2}-tx^{n_1-1}y^{m_2}$ $\quad (m_2\geq \frac{n_2}{2})$

$$(s-X_0)+\left(\frac{1}{n_1m_2}-\frac{1}{n_2}\right)\frac{tm_2y^{2m_2-n_2+1}}{\varphi}\left(y^{n_2-m_2-1}D_x+t(n_1-1)x^{n_1-2}D_y\right)$$

$$\varphi=1-t^2m_2(n_1-1)x^{n_1-2}y^{2m_2-n_2}$$

もう一つも同様.




$$\frac{x^{n_1}}{n_1}+\frac{y^{n_2}}{n_2}-x^{m_1}y$$

$$(s-X_1)+\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{1}{n_2}-1\right)\frac{x^{n_1-2m_1+1}}{m_1-x^{n_1-2m_1}y^{n_2-2}}\left(\frac{y^{n_2-1}}{m_1}D_x+x^{m_1-2}D_y\right)$$

$$\frac{x^{n_1}}{n_1}+\frac{y^{n_2}}{n_2}-xy^{m_2}$$

$$(s-X_2)+\left(\frac{m_2}{n_2}+\frac{1}{n_1}-1\right)\frac{y^{n_2-2m_2+1}}{m_2-x^{n_1-2}y^{n_2-2m_2}}\left(y^{m_2-2}D_x+\frac{x^{n_1-2}}{m_2}D_y\right)$$

(iii) $c>0$.

$\mathfrak{a}_f=(x^{n_1-m_1-1},\ y^{n_2-m_2-1})$ $\quad \varphi=1-t^2m_1m_2x^{2m_1-n_1}y^{2m_2-n_2}$

一階.

$$x^{n_1-m_1-1}(s-X_0)-cty^{m_2}D_x-\frac{t^2}{\varphi}m_1c\underbrace{x^{2m_1-n_1}}_{y^{2m_2-n_2+1}}\left(tm_2y^{m_2-1}D_x+x^{n_1-m_1-1}D_y\right)$$

$y^{n_2-m_2-1}(s-X_0)$ — -- 同様.

二階.

$$(s-X_0+c)(s-X_0)-\frac{t^2m_1m_2}{\varphi}\overbrace{\left\{(2X_0-X_1-X_2-c)s+X_1X_2-X_0^2+X_0c\right\}}^{x^{2m_1-n_1}y^{2m_2-n_2}}$$

M $\qquad \dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-t\,x^{n_1-2}y^{n_2-2}. \qquad c=1-2\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)$

Y型に含まれるが，二階の主要部が違うとされる．

標準形は $\quad (s-X_0+c)(s-X_0)+\cdots$

さらに $\quad \left(s+\left(1-\dfrac{1}{n_1}-\dfrac{1}{n_2}\right)X_0\right)(s-X_0)+\cdots \quad$ という数のものか，

$\left(s-\dfrac{n_1n_2-n_1-n_2}{n_1+n_2}X_0\right)(s-X_0)+\cdots \quad$ というもの．

$K^{\#}$ $\qquad \dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-t\,xy^{m} \qquad \underline{n_1<n_2} \quad n_2-1\geq m.$

$\mu=(m_2-1)n_1+1$

$c>0$ より $\quad m>\left(1-\dfrac{1}{n_1}\right)n_2>(n_1-1)(n_2-m)$ がわかる．

$\mathfrak{U}:f=\left(y^{n_2-m}-mtx,\ y^{(n_1-2)(n_2-m)-1}\right)\ni x^{n_1-2},\ x^{n_1-3}y^{n_2-m-1},\cdots.$

一般論から $\quad s^{n_1}+\cdots \quad$ はこれらがより小さくてすむ．

Arnold $\quad K_{12}.\ K_{14}$ をみよ． 又．Briançon の例など．

尚，Kについては別紙 $\qquad$ をみよ．

Y′ $\qquad m_1\geq \frac{2}{3}n_1, \quad \frac{1}{2}n_2>m_2\geq\frac{1}{3}n_1.$

$\mathfrak{U}:(f)\supseteqq\left(x^{2(n_1-m_1)-1},\ x^{n_1-m_1-1}y^{n_2-2m_2-1},\ y^{n_2-m_2-1},\ x^{n_1-m_1}-m_1y^{m_2}\right)$

$\varphi=1-m_1^2m_2x^{3m_1-2n_1}y^{3m_2-n_2}$ として

$x^{2(n_1-m_1)-1}(s-X_0)-\dfrac{c}{\varphi}y^{3m_2-n_2+1}\left\{y^{n_2-2m_2-1}(m_1y^{m_2}+x^{n_1-m_1})D_x+m_1^2x^{m_1-1}D_y\right\}$

$x^{n_1-m_1-1}y^{n_2-2m_2-1}(s-X_0)-\dfrac{c}{\varphi}\left\{(y^{n_2-m_2-1}+m_1m_2x^{2m_1-n_1}y^{m_2-1})D_x+m_1x^{m_1-1}D_y\right\}$

$y^{n_2-m_2-1}(s-X_0)-\dfrac{c}{\varphi}x^{3m_1-2n_1+1}\left\{m_2y^{m_2-1}(x^{n_1-m_1}+m_1y^{m_2})D_x+x^{2(n_1-m_1)-1}D_y\right\}$

$(x^{n_1-m_1}-m_1y^{m_2})(s-X_0)-c\,y^{m_2}x\,D_x$

二階は省略して，

三階

$$(s-X_0+2c)(s-X_0+c)(s-X_0)-\frac{x^{3m_1-2n_1}y^{3m_2-n_2}}{\varphi}(B_1s^2+B_2s+B_3)$$

$Y''$ ますます複雑になるが，4階までですむことはわかる．

$$(s-X_0+3c)(s-X_0+2c)(s-X_0+c)(s-X_0)+\cdots$$

(iv) $c<0$.

$S$ $n_1\geq 2m_1$, $n_2\geq 2m_2$. $\mu=(m_1-1)n_2+(m_2-1)n_1+1$.

$\Omega: f=(x^{m_1-1}, y^{m_2-1})$ $\quad\varphi=1-\dfrac{x^{n_1-2m_1}y^{n_2-2m_2}}{t^2m_1m_2}$

$$x^{m_1-1}(s-X_2)+\frac{cy^{n_2-m_2}}{tm_1m_2}D_x+\frac{cx^{n_1-2m_1}y^{n_2-2m_2}}{t^3(m_1m_2)^2\varphi}(y^{n_2-m_2+1}D_x+tm_1x^{m_1-1}D_y)$$

$$y^{m_2-1}(s-X_1)+\cdots$$

例によって，$D_x$ の係数 $x^{m_1}$ と $y^{n_2-m_2}$ は $X_2$ に即した次数

各々 $\dfrac{m_1m_2}{n_1m_2}$ & $\dfrac{(n_1-m_1)(n_2-m_2)}{n_1m_2}$ resp. $y^{n_2-m_2}$ の方が高次．

二階 $$(s-X_1)(s-X_2)-\frac{x^{n_1-2m_1}y^{n_2-2m_2}}{t^2m_1m_2\varphi}\left((X_1+X_2-2X_0+c)s+X_0^2-X_0c-X_1X_2\right)$$

$K^b$
$$\begin{cases}\dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-txy^{m_2} & c=\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}-1<0.\ m_2>\dfrac{n_2}{2}\\[2mm] \left(\dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-tx^{m_1}y\right. & \left. c=\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}-1<0.\ m_1>\dfrac{n_1}{2}\right).\end{cases}$$

この場合，色々とややこしいことになる

まず $2m_1=n_1+1$ or $2m_2=n_2+1$ のときは，(ii) L型の式をみればわかるように実は quasi-hom. になっている．

たとえば $x^3+xy^4+y^7$ など．

よってそれらは改めて L に含めることとする．

さらに 第一の形のものについては

① $3m_2-1 \le 2n_2 \Rightarrow \Omega:(f) = (x,\ y^{2m_2-n_2-1})$

② $3m_2-1 > 2n_2$ : $m$ or $m-1$ が $n_2-m$ でわれるとき

$$a = \frac{m_2}{n_2-m_2}-1 \quad \text{or} \quad \frac{m_2-1}{n_2-m_2}-1 \text{. われないとき} = \left[\frac{m_2}{n_2-m_2}\right]$$

とおくと，$\Omega:(f) = (x^a,\ y^{2m_2-n_2-1},\ y^{n_2-m_2}-m_2 t x)$

などと，色々場合によってちがってくる．

Arnold $K_{13}$．$W_{13}$ が この type である．

$S'$ $\quad \frac{2}{3}n_1 \ge m_1 > \frac{1}{2}n_1 \quad , \frac{1}{3}n_2 \ge m_2$ .

$$\Omega : f \supseteq (x^{m_1-1},\ x^{2m_1-n_1-1}y^{m_2-1},\ y^{2m_2-1},\ x^{n_1-m_1}-m_1 t y^{m_2})$$

一階.

$$x^{m_1-1}(\rho-X_2) + \frac{c}{\varphi}y^{n_2-3m_2+1}\left\{y^{m_2-1}(x^{n_1-m_1}+m_1 y^{m_2})D_x + \frac{x^{2n_1-2m_1-1}}{m_2}D_y\right\}$$

$$x^{2m_1-n_1-1}y^{m_2-1}(\rho-X_1) + \frac{c}{\varphi}\left\{y^{n_2-2m_2-1}\left(\frac{1}{m_1}x^{n_1-m_1}+y^{m_2}\right)D_x + m_1 x^{m_1-1}D_y\right\}$$

$$y^{2m_2-1}(\rho-X_1) + \frac{c}{\varphi}x^{2n_1-3m_1+1}\left\{y^{m_2-1}\left(m_2 x^{2m_1-n_1}+\frac{y^{n_2-2m_2}}{m_1}\right)D_x + x^{m_1-1}D_y\right\}$$

$$(x^{n_1-m_1}-m_1 y^{m_2})(\rho-X_1) - \frac{c}{m_1}x^{n_1-m_1}(xD_x)$$

$$\varphi = m_1^2 m_2 - x^{2n_1-3m_1}y^{n_2-3m_2}$$

三階は

$$\left(\rho-X_1-\frac{n_1}{m_1}c\right)(\rho-X_2)(\rho-X_1) - \frac{x^{2n_1-3m_1}y^{n_2-3m_2}}{\varphi}(B_1\rho^2+B_2\rho+B_3)$$

$S''$ $\quad \frac{3}{4}n_1 \geq m_1 > \frac{2}{3}n_1 \,, \qquad \frac{1}{4}n_2 \geq m_2 \geq 1$

色々複雑化するが、$\partial^4$ですみ、その作用素は.

$$(\partial - X_1 + 2\frac{n_1}{m_1}c)(\partial - X_1 + \frac{n_1}{m_1}c)(\partial - X_1)(\partial - X_2) + \cdots$$

(V). 一般に、$S'$などは、$\begin{matrix} l_1 n_1 \geq (l_1 + l_2) m_1 \\ l_2 n_2 \geq (l_1 + l_2) m_2 \end{matrix}$ となる $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ をみつけ、

$$(\partial - X_1 + (l_1 - 1)\frac{n_1}{m_1}c) \cdots (\partial - X_1)(\partial - X_2 + (l_2 - 1)\frac{n_2}{m_2}c) \cdots (\partial - X_2)$$

を主要部とする作用素をとることができることをもとにしている

又、$Y'$などは $\begin{matrix} l_1 n_1 \leq (l_1 + l_2) m_1 \\ l_2 n_2 \leq (l_1 + l_2) m_2 \end{matrix}$ となる $l_1 l_2$ によって

$$(\partial - X_0 + (l_1 + l_2 - 1)\cdot c) \cdots\cdots (\partial - X_0) + \cdots\cdots$$

をみつけうる.

これらの事情は以下II, IIIでも同様であるから、くりかえしのべることはせず II, III では $S$, $Y$ のみ書いておくので、他は類推されよ.

II. $\quad x\times\left(\dfrac{x^{n_1}}{n_1}+\dfrac{y^{n_2}}{n_2}-x^{m_1}y^{m_2}\right)$

$Y_{\mathrm{II}}$ $\quad m_1\geq\dfrac{n_1}{2}\quad m_2\geq\dfrac{n_2}{2}\qquad \mu=(n_1+1)(n_2-1)+1$

$$\mathfrak{a}:f=(x^{n_1-m_1},\ y^{n_2-m_2-1})$$

$$X_0=\frac{1}{(n_1+1)n_2}(n_2xD_x+n_1yD_y)\qquad k=\frac{(m_1+1)n_2-m_2}{n_2}$$

$$c=\frac{1}{(n_1+1)n_2}\left(m_1m_2-(n_1-m_1)(n_2-m_2)\right)$$

$$\varphi=1-kx^{2m_1-n_1}y^{2m_2-n_2}$$

一階

$$x^{n_1-m_1}(s-X_0)-\frac{c}{\varphi}\left\{m_2x^{2m_1-n_1+1}y^{m_2-1}D_x+(x^{m_1}+kxy^{2n_2-m_2-1})D_y\right\}$$

$$y^{n_2-m_2-1}(s-X_0)-\frac{c}{\varphi}y^{m_2}\left\{xy^{n_2-m_2-1}D_x-(kx^{m_1-1}+k'y^{n_2-m_2})\right\}$$

$$k'=\frac{1}{n_2m_2^2}\left((m_1+1)^2n_2+m_2^2-(m_1+1)m_2n_2\right)$$

= P階

$$(s-X_0+c)(s-X_0)-\frac{k}{\varphi}x^{2m_1-n_1}y^{2m_2-n_2}\left\{(2X_0-X_1-X_2-c)s+X_1X_2-X_0^2+X_0c\right\}$$

$\mu$: $x^iy^j$ $\begin{matrix}0\leq i\leq n_1\\ 0\leq j\leq n_2-2\end{matrix}$ と $y^{n_2-1}$ をとれば $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ 代表.

例えば $\quad f=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}xy^6+x^2y^4.\quad \mu=26\quad \mathfrak{a}:f=(x^2,y)\quad \mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{m}^{11}$

$$b(s)=(s+1)\cdot(s+\tfrac{1}{3})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{2}{3})(s\overset{\circ}{+}1)(s+\tfrac{4}{3})\cdot(s+\tfrac{3}{5})(s+\tfrac{4}{5})(s+\tfrac{6}{5})(s+\tfrac{7}{5})\cdot$$
$$(s\overset{\circ}{+}\tfrac{7}{15})(s+\tfrac{8}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{11}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{13}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{14}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{16}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{17}{15})(s\overset{\circ}{+}\tfrac{19}{15})(s+\tfrac{23}{15})$$

○をつけたのは, 固有多項式ではダブル. しかしともかく,
あまり出方がきれいではない.

$S_{\mathrm{II}}$ $\quad m_1 \le \frac{n_1}{2}$, $m_2 \le \frac{n_2}{2}$ $\quad \mu = n_1(m_2-1) + n_2(m_1+1)$

$$n : f = (x^{m_1}, y^{m_2-1})$$

$$X_1 = \frac{1}{(m_1+1)n_2 - m_2}\left((n_2-m_2)xD_x + m_1 y D_y\right)$$

$$X_2 = \frac{1}{(n_1+1)m_2}\left(m_2 x D_x + (n_1-m_1) y D_y\right)$$

一階 $\quad x^{m}(s - X_2) + \cdots, \quad y^{m_2-1}(s - X_1) + \cdots$

二階 $\quad (s - X_1)(s - X_2) + x^{n_1-2m_1} y^{n_2-2m_2}(\cdots)$

もはや状況はわかるであろうから，くどくどやめる…

$\mathrm{III}$. $\quad xy(x^{n_1} + y^{n_2} - x^{m_1}y^{m_2})$

$Y_{\mathrm{III}}$. $\quad m_1 \ge \frac{n_1}{2}$, $m_2 \ge \frac{n_2}{2}$. $\quad \mu = (n_1+1)(n_2+1)$

$$n : f = (x^{n_1-m_1}, y^{n_2-m_2}) \qquad X_0 = \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)-1}\left(n_2 x D_x + n_1 y D_y\right)$$

$$c = \frac{m_1m_2 - (n_1-m_1)(n_2-m_2)}{(n_1+1)(n_2+1)-1}$$

$$x^{n_1-m_1}(s - X_0) + \cdots, \quad y^{n_2-m_2}(s - X_0) + \cdots$$

$$(s - X_0 + c)(s - X_0) + \cdots.$$

$S_{\mathrm{III}}$. $\quad m_1 \le \frac{n_1}{2}$, $m_2 \le \frac{n_2}{2}$ $\quad \mu = n_1(m_2+1) + n_2(m_1+1) + 1$

$$n : f = (x^{m_1}, y^{m_2})$$

$$X_1 = \frac{1}{(m_1+1)(n_2+1) - (m_2+1)}\left((n_2-m_2)xD_x + m_1 y D_y\right)$$

$$X_2 = \frac{1}{(m_2+1)(n_1+1) - (m_1+1)}\left(m_2 x D_x + (n_1-m_1) y D_y\right)$$

$$x^{m_1}(s - X_2) + \cdots, \quad y^{m_2}(s - X_1) + \cdots$$

$$(s \cancel{-} X_1)(s - X_2) + \cdots\cdots$$

$\boxed{\text{まとめ}}$

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $c = \dfrac{n_1m_2+n_2m_1-n_1n_2}{n_1n_2+\Delta}$ $\quad \Delta =$ | $0$ | $+m_2$ | $+n_1+n_2$ |

Milnor # $\quad \left( \because X_0 = \dfrac{1}{n_1n_2+0}(n_2 x D_x + n_1 y D_y) \right)$

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| $c>0 \quad n_1n_2+1+\square$ <br> $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \parallel$ <br> $c<0 \quad n_1m_2+n_2m_1+1+\square$ $\quad \square =$ | $-n_1-n_2$ | $-n_1+n_2-1$ | $+n_1+n_2$ |
| $X_\phi = \dfrac{1}{m_1n_2+\nabla}((n_2-m_2)xD_x+m_1yD_y)$ | $0$ | $n_2-m_2$ | $n_1+(n_2-m_2)$ |
| $X_2 = \dfrac{1}{m_2n_1+\triangleright}(m_2xD_x+(n_1-m_1)yD_y)$ | $0$ | $m_2$ | $(n_1-m_1)+m_2$ |

$$\Omega(f) \begin{cases} Y_{\mathrm{I\,II\,III}} & (x^{n_1-m_1-1}, y^{n_2-m_2-1})\,(x^{n_1-m_1}, y^{n_2-m_2-1})\,(x^{n_1-m_1}, y^{n_2-m_2}) \\ S_{\mathrm{I\,II\,III}} & (x^{m_1-1}, y^{m_2-1}),\ (x^{m_1}, y^{m_2-1}),\ (x^{m_1}, y^{m_2}) \end{cases}$$

# 2変数. 色々な link の $b(s)$

2変数では $\{f=0\}\cap S_\varepsilon^3$ が一般に link になっている。$f$ が既約ならば torus knot 一個であるが、それは別として、ここに torus knot の link の代表的な3つの type の $b(s)$ を考える。

I $(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$  II $x(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$  III $xy(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$

尚、$(m,n)=1$ などとは仮定しないから、I でも成分は3以上かもしれない。表示式がこれ以上 factor を含むと非常に複雑になる。

<u>Notations</u>  $c = n\mu - \nu m$

$\Theta = \nu x D_x + \mu y D_y$.  $\Psi = n x D_x + m y D_y$.

0. 概説.

$c>0$  $c<0$ によって、支配している作用素はただちにわかる。$\Theta$ と $\Psi$ をある数でわったものである。それは個々の場合にのべておき、あとでまとめる。

すべて $\exists s^l + \cdots \in \mathfrak{g}[s]$ である。$l$ は評価可能.

Milnor # $= (m-1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu) + 1$  I の  などとすべてわかっている。

重要な実例については

I. $(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$

| $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $c_{X_1}$ | $c_{X_2}$ | $c_{Y_1}$ | $c_{Y_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{\Psi}{m(n+\nu)}$ | $\dfrac{\Theta}{\mu(n+\nu)}$ | $\dfrac{\Theta}{\nu(m+\mu)}$ | $\dfrac{\Psi}{n(m+\mu)}$ | $\dfrac{c}{m(n+\nu)}$ | $\dfrac{-c}{\mu(n+\nu)}$ | $\dfrac{c}{\nu(m+\mu)}$ | $\dfrac{-c}{n(m+\mu)}$ |

(1) type $S^*$ $\quad m\le\mu,\ n\ge\nu \quad (c>0)$ $\quad$ hil.no.# $= (m-1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu) + 1$.

一階 $\quad x^{m-1}(m(s-Y_1)-\mu x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-Y_2)) + cy^nD_x$

$\qquad\ \ y^{\nu-1}(\nu(s-X_1)-n x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-X_2)) + cx^\mu D_y$.

二階 $\quad (s-X_1)(s-Y_1) - \dfrac{n\mu}{m\nu}x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-X_2)(s-Y_2)$

これから計算すると，固有値は下記の5系列である.

(i) 重根. $(m,\nu)=d\ge 2$ のときのみおこり，$m=dm'$, $\nu=d\nu'$ として

$\boxed{tm'-1,\ t\nu'-1}$ を主項とするもつから $\boxed{-\dfrac{t}{d}}$ nilpotentつきdouble

$1\le t\le d-1$.

(ii) 孤立 $\quad \boxed{m-1,\ \nu-1} \to \boxed{-1}$.

(iii) $\boxed{i,j}$ $\quad 0\le i\le m-2,\ 0\le j\le \nu-2$ $\quad \to \boxed{-\dfrac{\nu(i+1)+\mu(j+1)}{\nu(\mu+m)}}$, $\quad \to \boxed{-\dfrac{n(i+1)+m(j+1)}{m(n+\nu)}}$ $\quad$ (ただし(ii)の系列があればそれをはぶく.)

(iv) $\boxed{i,j}$ $\quad m-1\le i\le m+\mu-1,\ 0\le j\le \nu-2 \quad \to \boxed{-\dfrac{\nu(i+1)+\mu(j+1)}{\nu(\mu+m)}}$

(v) $\boxed{i,j}$ $\quad 0\le i\le m-2,\ \nu-1\le j\le n+\nu-1 \quad \to \boxed{-\dfrac{n(i+1)+m(j+1)}{m(n+\nu)}}$

* $S$ というのは，$g$-$h$ の deformation の type $S_I$ と同じ (analyticに) であることをいう. 従ってこの場合

尚，厳密な固有函数を求めることも可能である。

$(x^m+y^n)(x^n+y^m)$　　$m\le n$ に対し，

$s_{jk} = -\frac{n(j+1)+m(k+1)}{m(m+n)}$ に属する固有函数は次のようにして求められる。（佐藤幹夫）

$$\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix} = a(a-1)\cdots(a-b+1) \qquad [a]_b = a(a+1)\cdots(a+b-1)$$

まず $\Delta^{jk} = \sum_{\nu\ge 0} C_\nu^{jk} \boxed{j-\nu(n-m),\ k-\nu(n-m)}$

$$C_\nu^{jk} = \begin{bmatrix} j \\ \nu(n-m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ \nu(n-m)\end{bmatrix}\frac{[s_{jk}]_\nu \left[-\frac{j+1}{m}\right]_\nu}{\nu!\left[1+\frac{j-k}{n+m}\right]_\nu}$$

$0\le j<m-1$, $0\le k<n-1$ or $j=k=n-1$ では $\Delta^{j,k}$ 自身。

それ以外では次のように

$$\Phi^{jk} = \sum_{\mu\ge 0} e_\mu^{jk}\Delta^{j+\mu m,\ k-\mu n}, \quad e_\mu^{jk} = (-)^{(n-m-1)\mu}\frac{\begin{bmatrix}k\\ \mu n\end{bmatrix}\left[\frac{j+1}{m}\right]_\mu}{[j+1]_{\mu m}\left[1+\frac{j-k}{n+m}\right]_\mu}$$

$$\left(-1+\frac{k-j}{n+m} \ne 0,1,\dots,\left[\frac{\min(k,j)}{n-m}\right]\right)$$

とおけばよい。 ∎

$b(s)$ はこれだけある。特に，local monodromy の固有多項式が，

$$\frac{t^{m(n+\nu)}-1}{t^{(n+\nu)}-1}\cdot\frac{t^{\nu(m+\mu)}-1}{t^{m+\mu}-1}(t-1)$$

と考えられることになるが，これは link theory と一致する。

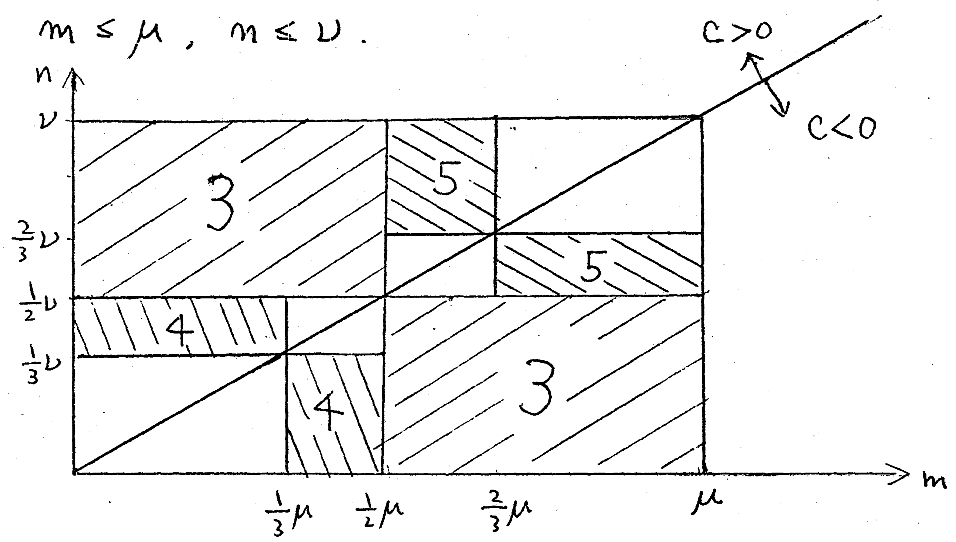
又，我々の方法で，最小多項式の double factor がわかるは著しい。

$(m,\nu)=d\ge 2$ なら

$$b(s)=(s+1)\cdot\prod_{t=1}^{d-1}\left(s+\frac{t}{d}\right)^2\cdot(\cdots\ )$$

(ii) $m \geq \mu$, $n \leq \nu$ $(c<0)$ (i) と同様.

(iii) $m \leq \mu$, $n \leq \nu$.




上図は, $m, n$ のとり方の図示である. 対角線より上が $c>0$. 下が $c<0$. 参考のため入れた数字は, $\exists\, s^{l} + \cdots \in \mathfrak{g}[s]$ となる $l$ の評価を示す.

① $c>0$. $\dfrac{\mu}{m} > \dfrac{b}{a} > \dfrac{\nu}{n}$ となる有理数 $\frac{b}{a}$ で,
↳ $c_{X_1}, c_{Y_1} > 0$

$a+b$ が最小のものをとり, $a+b=l$ とすれば,

$$P_X = (s - X_1 + (a-1)c_{X_1})(s - X_1 + (a-2)c_{X_1}) \cdots\cdots (s - X_1)$$

$$P_Y = (s - Y_1 + (b-1)c_{Y_1}) \cdots\cdots (s - Y_1 + c_{Y_1})(s - Y_1)$$

$$P(s) = P_X \cdot P_Y + \cdots\cdots \in \mathfrak{g}[s].$$

② $c<0$. $\dfrac{\mu}{m} < \dfrac{b}{a} < \dfrac{\nu}{n}$ と同様にとって,
↗ $c_{X_2}, c_{Y_2} > 0$

$$Q_X = (s - X_2 + (b-1)c_{X_2}) \cdots\cdots (s - X_2)$$

$$Q_Y = (s - Y_2 + (a-1)c_{Y_2}) \cdots\cdots (s - Y_2)$$

$$Q(s) = Q_X \cdot Q_Y + \cdots \in \mathfrak{g}[s].$$

たとえば　$\mu \leq 2m$, $2n \leq \nu$　とせよ．　$(c_{X_2} > 0)$

$$(s - X_2 + c_{X_2})(s - X_2)(s - Y_2) + x^{2m-\mu} y^{\nu - 2n}(\cdots)$$

二階のもとしては，不十分であるが，

$x^{\mu - m}(s - X_2)(s - Y_2) + \cdots$, $y^n(s - X_2)(s - Y_2) + \cdots$

一階としては，やはり不十分だが

$x^{\mu-1}(s - Y_2) + \cdots$, $x^{\mu-m-1} y^n (s - X_2) + \cdots$, $y^\nu (s - X_2) + \cdots$.

などがわかっている。

ただしこの場合など，$s^2 + \cdots$ ではすまない，と証明したわけではない．

書きかすれたが，

$$\left.\begin{array}{lll} c > 0 & \Rightarrow & \text{Milnor} \# = (m-1)(n+\nu) + (\nu - 1)(m+\mu) + 1 \\ c < 0 & \Rightarrow & \quad\text{〃}\quad = (\mu - 1)(n+\nu) + (n-1)(m+\mu) + 1. \end{array}\right\} (*)$$

(iv)　$m \geq \mu$, $n \geq \nu$．　(iii) と同様．

(V) まとめ，　Milnor # は　$c$ の正負により上の $(*)$ で与えられる．

$c > 0$ なら　$X_1$, $Y_1$ が

$c < 0$ なら　$X_2$, $Y_2$ が　登場する．

$c > 0$ のとき，$x^m y^\nu$ は $x^{m+\mu} + y^{n+\nu}$ に対して低次．とくに $S$ のときは sweep out すると，$x^\mu y^n$ がなくなる．その他の場合は $x^\mu y^n$ が生きないので，simplex type ではない．

Ⅱ. $\quad x(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$

$$X_1 \qquad X_2 \qquad Y_1 \qquad Y_2$$

$$\frac{\Psi}{m(n+\nu)+n} \qquad \frac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\nu} \qquad \frac{\Theta}{\nu(m+\mu)+\nu} \qquad \frac{\Psi}{n(m+\mu)+n}$$

$c_{X_1} = \dfrac{c}{m(n+\nu)+n}$ etc も Ⅰ と同様に定める.
式自体，$x,y$ に関し対称でないから，分母で加わる数は $n,\nu$ のみで $m,\mu$ が出てこないことに注意せよ.

(i) $\mu \geq m.\ n \geq \nu.\quad S_{\text{Ⅱ}}.$

$$\text{Milnor}\ \# = (m+1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu)$$

$$\mathfrak{n}: f = (x^m, y^{\nu-1}) \qquad \underline{m' = m+\mu+1\ とおく}$$

一階

$$x^m(s-Y_1) - \frac{n\mu}{\nu m}x^\mu y^{n-\nu}\left\{(s-X_1) - \frac{c^2 yD_y}{n\mu\nu m'(m(n+\nu)+n)}\right\}$$

$$+\frac{cy^n}{(m(n+\nu)+n)\nu m'}\left\{(n+\nu)xD_x - m(yD_y)\right\}$$

$$-\frac{(\mu(n+\nu)+\nu)}{(m(n+\nu)+n)}\frac{c^2}{m\nu^2 m'^2}\frac{x^{\mu-m}y^{2(n-\nu)}}{\psi}\left\{\nu y^\nu(xD_x) - (\nu(m+\nu)y^\nu + cx^\mu)(yD_y)\right\}$$

$$y^{\nu-1}(s-X_1) - \frac{n(\mu(n+\nu)+\nu)}{\nu(m(n+\nu)+n)}x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-Y_1) + \frac{cx^\mu D_y}{\nu(m(n+\nu)+n)}$$

又は $\displaystyle x^m(s-Y_1) - \frac{n\mu}{m\nu}x^\mu y^{n-\nu}(s-X_1) + \frac{cy^n}{(m(n+\nu)+n)\nu m'}((n+\nu)xD_x - myD_y)$

$$+\frac{c^2}{(m(n+\nu)+n)m\nu^2 m'}x^\mu y^{n-\nu}(yD_y) - \frac{c(\mu(n+\nu)+\nu)x^{\mu-m}y^{2n-\nu}}{m\nu^2 m'(m(n+\nu)+n)}(s-Y_1)$$

あるいは $\displaystyle x^m(s-Y_1) - \frac{cy^n}{m\nu m'}(s-xD_x) - \frac{n\mu}{m\nu}x^\mu y^{n-\nu}(s-X_1)$
も便利.

$$\psi = m(n+\nu)+n - (\mu(n+\nu)+\nu)x^{\mu-m}y^{n-\nu}$$

二階

$$(s-X_1)(s-Y_1) - \frac{n(\mu(n+\nu)+\nu)}{\nu(m(n+\nu)+n)}x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-X_2)(s-Y_2)$$

作用素をみた感じからわかるように, double はれたくい.

I を参照すれば (ii) (iii) (iv) などわかるであろう. 略す.

この $S_{\mathrm{II}}$ では, monodromy の固有多項式

$$(t^{m(\nu+n)+n}-1)\frac{(t^{\nu(m+\mu+1)}-1)}{t^{m+\mu+1}-1}(t-1)$$ とおもわれる.

III. $xy(x^m+y^n)(x^\mu+y^\nu)$

| $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $Y_2$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\Psi}{m(n+\nu)+m+n}$ | $\dfrac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\mu+\nu}$ | $\dfrac{\Theta}{\nu(\mu+m)+\mu+\nu}$ | $\dfrac{\Psi}{n(m+\mu)+m+n}$ |

$c_{X_1} = \dfrac{c}{m(n+\nu)+m+n}$ なども同様.

$S_{\mathrm{III}}$. $\mu \geq m$, $n \geq \nu$

Milnor # $= (m+1)(n+\nu)+(\nu+1)(m+\mu)+1$.

$U : f = (x^m, y^\nu)$

補助的な作用素 $X_0$ を用いる.

$$X_0 = \frac{1}{(m+\mu+1)(n+\nu+1)-1}\{(n+\nu)xD_x+(m+\mu)yD_y\}$$

$$c_{X_0} = \frac{c}{(m+\mu+1)(n+\nu+1)-1}$$

一階

$$x^m(s-Y_1) - \frac{c_{Y_1}}{c_{X_0}\psi}y^{n-\nu}(y^\nu s + x^\mu Y_1 - (x^\mu+y^\nu)X_0)$$

$$y^\nu(s-X_1) - \frac{c_{X_1}}{c_{X_0}\psi}x^{\mu-m}(x^m s + y^n X_1 - (x^m+y^n)X_0).$$

第二項の $y^\nu s$, $x^m s$ はそれぞれ互いに代入してから $x^m$, $y^\nu$ で再びくくってやればけせる. ややこしくなるのでここには記さない.

二階

$$(s-X_1)(s-Y_1) - \frac{c_{X_1}c_{Y_1}}{c_{X_2}c_{Y_2}}x^{\mu-m}y^{n-\nu}(s-X_2)(s-Y_2)$$

$$\text{or. } (s-X_1)(s-Y_1) - \frac{c_{X_1}c_{X_2}}{c_{X_0}}\frac{x^{\mu-m}y^{n-\nu}}{1-x^{\mu-m}y^{n-\nu}}s(s-X_0)$$

$b(s)$ は容易にもとめうる. この場合も, $(m+1,\nu+1)=d\geq 2$ であれば, $m+1=dm'$, $\nu+1=d\nu'$ として,

$$\underset{t=1,\dots,d-1.}{\boxed{tm'-1,\, t\nu'-1}} \longrightarrow \boxed{-\frac{t}{d}} \quad \text{nilpotent つき double.}$$

その他詳細は略す. $S_I$ を参考にせよ. 実例は

$\boxed{\text{まとめ}}$  $\Theta = \nu x D_x + \mu y D_y$,  $\Psi = n x D_x + m y D_y$.

$c = n\mu - m\nu$

| | $X_1$ | $X_2$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $\underline{S}\ \boxed{\mathfrak{r} : \mathfrak{f}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $\dfrac{\Psi}{m(n+\nu)}$ | $\dfrac{\Theta}{\mu(n+\nu)}$ | $\dfrac{\Theta}{\nu(m+\mu)}$ | $\dfrac{\Psi}{n(m+\mu)}$ | $x^{m-1},\ y^{\nu-1}$ |
| II | $\dfrac{\Psi}{m(n+\nu)+n}$ | $\dfrac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\nu}$ | $\dfrac{\Theta}{\nu(m+\mu)+\nu}$ | $\dfrac{\Psi}{n(m+\mu)+n}$ | $x^{m},\ y^{\nu-1}$ |
| III | $\dfrac{\Psi}{m(n+\nu)+m+n}$ | $\dfrac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\mu+\nu}$ | $\dfrac{\Theta}{\nu(\mu+m)+\mu+\nu}$ | $\dfrac{\Psi}{n(m+\mu)+m+n}$ | $x^{m},\ y^{\nu}$ |

$c > 0 \Rightarrow X_1,\ Y_1$

$c < 0 \Rightarrow X_2,\ Y_2$

$\boxed{c > 0}$

| | Milnor # | Alexander polynomial. (m, n e [illegible]) |
|---|---|---|
| I | $(m-1)(n+\nu)+(\nu-1)(m+\mu)+1$ | $\dfrac{t^{m(n+\nu)}-1}{t^{n+\nu}-1}\cdot\dfrac{t^{\nu(m+\mu)}-1}{t^{m+\mu}-1}(t-1)$ |
| II | $(m+1)(n+\nu)+\overset{(\nu-1)}{\cancel{\nu}}(m+\mu)$ | $(t^{m(n+\nu)+n}-1)\dfrac{(t^{\nu(m+\mu+1)}-1)}{t^{m+\mu+1}-1}(t-1)$ |
| III | $(m+1)(n+\nu)+(\nu+1)(m+\mu)+1$ | $(t^{m(n+\nu)+m+n}-1)(t^{\nu(m+\mu)+\mu+\nu}-1)(t-1)$ |

## §4.　§2. 3 に関する諸例.

§2. §3でのべた一般論に即して，その主要な状況を理解していただくために，いくつかの実例について，詳しくのべてみたい。特徴あるものをえらんである.

| | |
|---|---|
| 1. $\frac{1}{5}(x^5+y^5)+\frac{1}{3}x^3y^3$.<br>type M. | μ-const family でも $b(s)$ の変化することを初めて三輪が指摘した例. |
| 2. $x^n(x+ay)-y^4$<br>type K. | ch. index = 1. しかし，$s^l+\cdots\in\mathfrak{J}$ となる $l=n-2$ ではないか？という，柏原が注目した例. |
| 3. $(x^3+y^5)(x^5+y^3)$<br>link I S | 佐藤により計算された系列の一つで，monodromy の最小多項式に2つの double root があり，$b(s)$ でも完全に対応して出てくる |
| 4. M. C. Grima の例.<br>I (iii) ①, ② | monodromy matrix が Q 成分行列で変換される2つの link だが，$b(s)$ はちがってくる. |
| 5. $xy(x+y^2)(x^2+y)$<br>III S | Trivial knot 4個にすぎないのに最小多項式に double が出，$b(s)$ でもたしかにそうなる. |
| 6. $\frac{x^{10}}{10}+\frac{y^3}{3}+\frac{1}{7}x^7y$.<br>K# | Briançon という人が，何かの理由で注目した実例. 複雑な計算の末, $L(f)=2$ となる. 固有値のずれ方，おもしろい. |

$\frac{1}{5}(x^5+y^5)+\frac{1}{3}tx^3y^3.$ $\quad \mu=16. \quad \mathcal{O} \supseteq \mathfrak{m}^7.$

一般論のとり方とはちがうとり方を紹介しておく.

$$\mathcal{J}[s] = (f_xD_y - f_yD_x,\ xs-X,\ ys-Y,\ s^2-As-B)$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{\varphi}X_0 + \dfrac{ty^2}{15\varphi^2}(-yD_x + tx^2D_y) \\ Y = \dfrac{y}{\varphi}X_0 + \dfrac{tx^2}{15\varphi^2}(ty^2D_x - xD_y) \end{cases} \qquad X_0 = \frac{1}{5}(xD_x+yD_y),\quad \varphi = 1-t^2xy$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} + X_0 + \dfrac{t^2(1+t^2xy)}{15(1-t^2xy)}xy \\ B = \dfrac{3}{5}X_0 + \dfrac{t}{15^2\varphi^2}\left\{15t\left(1-\dfrac{7}{3}t^2xy\right)xyX_0 - \sum_{i\le j} a_{ij}D_iD_j\right\} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11} = (3-2t^2xy)y^3 \\ a_{22} = (3-2t^2xy)x^3 \end{cases} \quad a_{12} = -t(7-5t^2xy)x^2y^2.$$

$$s^2 - sA - B = \left(s+\frac{3}{5}\right)(s-X_0) + t(\cdots).$$

一般論から出る作用素は $\left(s - X_0 + \frac{1}{5}\right)(s-X_0)+\cdots$

従ってさらに $\left(s-\frac{3}{2}X_0\right)(s-X_0)+\cdots$ というのもある.

このように主部の分解状況が色々とれるのは, $\mathcal{O}:f=\mathfrak{m}$ であるため, 一個の作用素をずらせばこと足りる(この場合 ($\frac{s}{5}$ が $\frac{3}{5}$ にずれる) ことに一つの原因がある.

$t\neq 0$ で $\begin{pmatrix} \boxed{0\ 0} \\ -\frac{2}{5}\ \boxed{0\ 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0\ 0} \\ -\frac{3}{5}\ \boxed{0\ 0} \end{pmatrix}$ が eigenvector に出る.

$$b_{t\neq 0}(s) = (s+1)\left(s+\frac{2}{5}\right)\left(s+\frac{3}{5}\right)\cdots\cdots\left(s+\frac{7}{5}\right)$$

$t=0$ では $\boxed{3\ 3}$ から $s+\frac{8}{5}$ が出るために

$$b_{t=0}(s) = (s+1)\left(s+\frac{2}{5}\right)\left(s+\frac{3}{5}\right)\cdots\cdots\left(s+\frac{7}{5}\right)\left(s+\frac{8}{5}\right)$$

一般に, $x^n+y^n-tx^my^m \qquad n>m>\frac{n}{2}.$

$$b_{t\neq 0}(s) = (s+1)\prod_{2\le k\le n+m-1}\left(s+\frac{k}{n}\right)$$

$$b_{t=0}(s) = (s+1)\prod_{2\le k\le 2n-2}\left(s+\frac{k}{n}\right)$$

2. $K: \quad x^n(x+ay) - y^n \qquad \mu = n(n-1).$

(特にこの形を，相似になる K型という) $a=0$ こみで $\mu$-cte family.

$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^{2n-2}$. $\quad \mathfrak{a} : f = ((n+1)x+ny,\ x^{n-3}) \supseteq \mathfrak{m}^{n-3}$.

一階. $\{(n+1)x+nay\}(s-X_0) + \dfrac{ay}{n(n+1)}xD_x$

$$x^{n-3}(s-X_0) - \frac{1}{1+\frac{(-n)^{n-2}}{(n+1)^{n-1}}a^n x}\left\{ g(x,y)D_x - \frac{(-n)^{n-2}}{(n+1)^n}(ax)^{n-1}(aD_x-(n+1)D_y)\right\}$$

ここに $\quad g(x,y) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-2} x^{n-2-\nu}\left(\frac{-nay}{n+1}\right)^{\nu}.$

$$X_0 = \frac{1}{n+1}xD_x + \frac{1}{n}yD_y.$$

二階. 一般にかなりややこしくなる. $f=0$ が rational curve で ($a=1$ として) parametrization

$x = \dfrac{t^n}{1+t} \quad y = \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ をもつことも効きそうである.

ideal が一見含むとは思えないような元を含むことあり.

$$x^{n+2}y^{n-2} = \{(n^3-2n^2-n+1)x^n + n(n-1)^2x^{n-1}y + n(n^2-n+1)y^{n-1} + xy^{n-2}\}f$$
$$-\frac{1}{n^2}\{(n-1)^3xf_x^2 + (n-1)(n(n-1)y-(n^2-n+2)x)f_xf_y - (x+n(n^2-n+1)y)f_y^2\}$$

などという関係が成立し，$\mathbb{C}f^2+\mathfrak{a}f+\mathfrak{a}^2 \ni x^{n+2}y^{n-1}$ などがわかる.

一般の $n$ については，$s^{n-2}+\cdots$ まで必要とおもわれている(推定)

<u>$n=4$</u>. $\quad f = x^5+x^4y-y^4 \quad \mu=12 \quad \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^6 \quad \mathfrak{a}:(f) = \mathfrak{m}.$

$X_0 = \frac{1}{5}xD_x + \frac{1}{4}yD_y. \qquad \varphi = 1 + \dfrac{4^2}{5^3}x$

一階. $$x(s-X_0) + \frac{y}{100}\left(x-\frac{4}{5}y\right)D_x + \frac{1}{100\varphi}\left\{\frac{4}{5^2}\left(y^2-\frac{4}{5}xy+x^2\right)xD_x - \frac{4}{5}x^3D_y\right\}$$

$$y(s-X_0) + \frac{y^2}{100}D_x + \frac{1}{100\varphi}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}xy-x^2-\frac{4}{5^2}y^2\right)xD_x + x^3D_y\right\}$$

$\boxed{i,j}$ $\begin{array}{l}0\le i\le 3\\ 0\le j\le 2\end{array}$ のうち, $\boxed{3,2}$ を主項とする固有ベクトルなし. その代り $\boxed{1,0}$ から2つ出る. 計算してみれば, $\boxed{0,0}$ から出るべき factor は $(s+\frac{9}{20})(s+\frac{11}{20})$ であるべきだとわかる.

一方, 一般論により

$$(s-X_0+\tfrac{3}{20})(s-X_0+\tfrac{1}{10})(s-X_0+\tfrac{1}{20})(s-X_0)+\cdots\cdots \in \mathcal{J}[s].$$

通常すなおなものでは, 二階の作用素はこの後ろから2つのfactorをとればよい. ところが今の場合, 後ろから3つめがきいてくる! そうでないと $\frac{11}{20}$ が出ない.

これから考えても, この系列は一般に複雑なことがおこりうることが納得されるであろう.

尚この $n=4$ では前出の $x^{n+2}y^{n-2}$ の $x$ 倍 $x^7y^2$ と $(f-X_0f)^2=c^2x^8y^2$ とから二階の作用素を出しうる.*

⇐ parametrization $x=\frac{t^n}{1+t}$ $y=\frac{t^{n+1}}{1+t}$.

尚, irreducible curve であるから, Th. 1 よりmonodromyは特にsemisimpleで, Theorem 2 より $\Delta(t)=\dfrac{(t^{n(n+1)}-1)(t-1)}{(t^{n+1}-1)(t^n-1)}$ となり,

$x^{n+1}-y^n$ とかわらぬことに注意せよ.

$b(s)$ では $n=4$ のとき, $(s+1)\cdot(s+\frac{9}{20})(s+\frac{11}{20})(s+\frac{13}{20})\cdots\cdots(s+\frac{13}{10})$
となり, $x^{n+1}-y^n$ の $(s+1)(s+\frac{9}{20})(s+\frac{13}{20})\cdots$ $(s+\frac{7}{10})(s+\frac{31}{20})$
とは, ちがってくる. $\frac{31}{20}\equiv\frac{11}{20}$ mod. $\mathbb{Z}$. $\uparrow\boxed{3,2}$

* 二階の作用素については, 次頁をみよ.

二階の作用素. 非常に奇妙ともいえるが、又自然なものがもとまった. もっとましなのが出る可能性はある.

$$Q_1(s) = x\{933(s-X_1) - 720(s-X_0) + 13xD_y\} + \frac{1}{4} y D_x$$

$$Q_2 = 27(xD_x)^2 + 6x(6y-7x)D_xD_y - x(x+52y)D_y^2$$

$$Q(s) = (s-1)Q_1 - \frac{x}{4^2} Q_2$$

$$R(s) = \frac{x}{4^2}\{-1079(s-X_1) - 3200(s-X_0) - 156xD_y\} + \frac{3}{4^2} y D_x$$

$$\left(Q(s) + R(s) + 25(s-1)(s-X_0) + \frac{75}{4}(s-X_0)\right) f^s = s(s-1)x^8y^2f^{s-2}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{15}{4^2}s - X_0 + \frac{21}{4^3\cdot 5}\right)(s-X_0) - \frac{1}{20^2}(Q(s)+R(s)) \in \mathcal{J}[s].$$

$$\text{i.e.} \quad \left(s - \frac{16}{15}X_0 + \frac{7}{100}\right)(s-X_0) - \frac{1}{3\cdot 5^3}(Q(s)+R(s)) \in \mathcal{J}[s].$$

これから $\boxed{100} \to \frac{9}{20}, \frac{11}{20}$ がわかる.
ともかく主部は分解されている. $yD_x$ があるが、weight つまで higher order.

にはすぐにしらべねばならない.
このようにいったのは $x^2y^2 \notin \mathcal{O}+(f)$, $x^2y^2 \in \mathcal{O}+\mathbb{C}f$.

3. $(x^3+ty^5)(tx^5+y^3)$ link I S

$\mu=33$. Foxの理論によれば, $g(t)=\frac{t^{24}-1}{t^8-1}(t^3-1)$

であり, $\exp(\pm\frac{2}{3}\pi i)$ が double.

$\varphi=1-\frac{25}{9}t^2x^2y^2$.

$x^2s-X \qquad X=\frac{1}{\varphi}\{x^2X_1-\frac{t}{9}(15tx^4y^2X_1+2y^5D_x)\}$

$y^2s-Y \qquad Y=\frac{1}{\varphi}\{y^2X_1-\frac{t}{9}(15tx^2y^4\cancel{X_1}+2x^5D_y)\}$

$X_1=\frac{1}{24}(5xD_x+3yD_y)$, $Y_1=\frac{1}{24}(3xD_x+5yD_y)$

$s^2-sA-B \qquad A=X_1+X_2-\frac{t^2x^2y^2}{9\varphi}(X_1+X_2)+\cdots$

$B=-X_1X_2-\frac{16t^2x^2y^2}{9\varphi}X_1X_2\cdots$

$s^2-sA-B=(s-X_1)(s-X_2)-\frac{t^2x^2y^2}{9\varphi}(\cdots)$.

$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, B_{pt})$での表現行列をもとめると,

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 1 & & & & & \\ & -1/3 & & & * & & \\ & & -2/3 & 1 & & * & \\ & & & -2/3 & & & \\ & & & & -\frac{11}{24} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\frac{17}{12} \end{pmatrix}$$

$e_1=\begin{pmatrix}\boxed{10}\\ -\frac{1}{3}\boxed{00}\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\ \boxed{00}\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}\boxed{11}\\ -\frac{1}{3}\boxed{11}\end{pmatrix}$

$e_4=\begin{pmatrix}0\\ \boxed{11}\end{pmatrix}$ $e_5=\begin{pmatrix}\boxed{01}\\ -\frac{11}{24}\boxed{01}\end{pmatrix}$

$\cdots \quad e_{33}=\begin{pmatrix}\boxed{17}+280\boxed{42}\\ -\frac{17}{12}\boxed{17}+\cdots\end{pmatrix}$

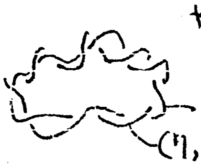
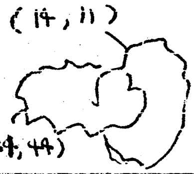
$b(s)=(s+1)\cdot(s+\frac{1}{3})^2(s+\frac{2}{3})^2\cdot(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})\cdot(s+\frac{7}{12})\cdots(s+\frac{17}{12})$

$\underset{\overset{\uparrow}{\boxed{22}}}{(s+1)}\cdot(s+\frac{11}{24})\cdots(s+\frac{31}{24})$

となって, 最小多項式と完全に一致する.

4. M. C. Grima の examples.

下記 G1 と G2 の local monodromy の matrix は, Q 成分行列で互いに同値となることを, M. C. Grima が証明した, と A'Campo はいう. (unpublished) 我らの $b(s)$ は, ちがってくることがわかる.

| | G1 | G2 |
|---|---|---|
| $f$ | $(x^7+y^{22})(x^{28}+y^{33})$ | $(x^{14}+y^{11})(x^{21}+y^{44})$ |
| | どちらも $x^{35}+y^{55}$ の 2-parameter (deformation) | |
| singularity |  *同方向の Torus knots (28,33) (7,22) |  (14,11) (24,44) *交叉した torus knots. |

$C =$ $5\cdot 7\cdot 10 > 0$ $\qquad -5\cdot 7\cdot 11 < 0$

type $\quad$ I (iii) ① 3 $\qquad$ I (iii) ② 3

作用素 $\quad X_1 = \frac{1}{7\cdot 55}(22xD_x + 7yD_y)$ $\qquad X_2 = \frac{1}{21\cdot 55}(44xD_x + 21yD_y)$

$Y_1 = \frac{1}{33\cdot 35}(33xD_x + 28yD_y)$ $\qquad Y_2 = \frac{1}{11\cdot 35}(11xD_x + 14yD_y)$

$C_{Y_1} = \frac{1}{3}$ $\qquad C_{Y_2} = \frac{1}{3}$

Milnor# $= 1451 = 1451$.

Alex. poly. $\dfrac{t^{5\cdot 7\cdot 11}-1}{t^{55}-1}\cdot\dfrac{t^{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}-1}{t^{35}-1}\,t-1 = \dfrac{t^{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}-1}{t^{55}-1}\,\dfrac{t^{5\cdot 7\cdot 11}-1}{t^{35}-1}\,t-1$.

$$b(s) = (s+1)\cdot\Big(s+\underset{\boxed{1,0}}{\frac{64}{1155}}\Big)\cdots\underset{\boxed{6,32}}{(s+1)}\cdots \neq (s+1)\cdot\Big(s+\underset{\boxed{0,0}}{\frac{65}{1155}}\Big)\cdots\underset{\boxed{20,10}}{(s+1)}\cdots$$

double factor なし. $\qquad$ double factor なし.

*) このような表現は適当でない, との注意をいただいた.

5. $f = xy(x+y^2)(x^2+y)$ $\quad \mu = 13 \quad$ type link III S

$\Omega \supseteq m^7 \quad \mu$ 代表 $x^i y^j \ \ {\scriptstyle 0\le i\le 2,\ 0\le j\le 2}$. $x^3, x^3y, y^3, xy^3$.

Fox の理論によれば、この link の Alex. poly $(t_\mu \to t) = \chi$.

最小多項式 $g$ とすれば $\quad \chi = (t-1)(t^6-1)^2$

$t=-1$ が double. $\longrightarrow \quad g = (t+1)(t^6-1)$

$$X_1 = -\frac{1}{3}xD_x + \frac{1}{6}yD_y, \quad Y_1 = \frac{1}{6}xD_x + \frac{1}{3}yD_y$$

link III S の判定条件より $(1+1, 1+1) = 2$ で $b(s)$ も double factor $(s+\frac{1}{2})^2$ をもつ。その他をもとめてみる.

$$x^3y^2 = \frac{5}{(4-13xy+9x^2y^2)}\left\{\frac{(2+3xy)}{15}x(-xf_x+4yf_y) - \frac{y^2}{3}(4xf_x - yf_y)\right\}$$

$$\begin{cases} x(s-Y_1) - \dfrac{y}{30(4-13xy+9x^2y^2)}\{(7x^2-40y-9x^3y)xD_x + 2(14x^2+5y+18x^3y)yD_y\} \\ y(s-X_1) - \cdots\cdots \end{cases}$$

$$s^2 - sA - B. \qquad A = \frac{1-\frac{1}{10}xy}{2(1-\frac{5}{4}xy)}\langle x, D\rangle, \quad B = -\frac{1-xy}{1-\frac{5}{4}xy}X_1Y_1$$

$$s^2 - sA - B = (s-X_1)(s-Y_1) + \cdots\cdots$$

$\boxed{00} \to -\frac{1}{2}$ double $\quad \boxed{10}\ \boxed{01} \to -\frac{2}{3} \quad \boxed{11} \to -1, \quad \boxed{20}\ \boxed{02} \to -\frac{5}{6}$

$\boxed{30}\ \boxed{03} \to -1 \quad \boxed{21} + \frac{1}{6}\boxed{40},\ \boxed{12} + \frac{1}{6}\boxed{04} \to -\frac{7}{6}, \quad \boxed{31} - \boxed{04} + \frac{1}{20}\boxed{50},\ \boxed{13} - \boxed{40} + \frac{1}{20}\boxed{05} \to -\frac{4}{3}.$

固有多項式 $= (s+\frac{1}{2})^2(s+\frac{2}{3})^2(s+\frac{5}{6})^2(s+1)^3(s+\frac{7}{6})^2(s+\frac{4}{3})^2$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+\tfrac{1}{2})^2(s+\tfrac{2}{3})(s+\tfrac{5}{6})(s+1)(s+\tfrac{7}{6})(s+\tfrac{4}{3})$$

6. $\dfrac{x^{10}}{10} + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{x^7}{7}y$ (Briançon) type $K^{\#}$.

氏が學生をやっていた，と相原はいう.

$\mathfrak{a} : f = (x^2, y)$ $\mu = 2 \times 9 = 18$. $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{m}^{12}$

$x^i y^j$ $0 \leq i \leq 8$, $j = 0, 1$.

$$X_0 = \frac{1}{10} x D_x + \frac{1}{3} y D_y. \quad X_1 = \frac{2}{21} x D_x + \frac{1}{3} y D_x. \quad X_2 = \frac{1}{10} x D_x + \frac{3}{10} y D_y.$$

一階.
$$x^2(s - X_0) + \frac{1}{210} y D_x - \frac{x}{1470(1+\frac{x}{7})}(7x^5 D_y + (x^3 - y) D_x)$$
$$y(s - X_0) + \frac{1}{210} x^7 D_y - \frac{x^2}{1470(1+\frac{x}{7})}(x^6 D_y + (x^3 - y) D_x)$$

三階に
$$(s - X_0 + \tfrac{1}{15})(s - X_0 + \tfrac{1}{30})(s - X_0) - \frac{x}{49(1 - \frac{x}{49})}(\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3)$$
の形をもつがあることはすぐわかるが，2階ですむ.

$$\theta = (x^3 - y) D_x + x^6 D_y, \quad \varphi = 1 + \frac{x}{7}$$
$$Q = \frac{1}{\varphi}\left\{ (x^2 D_y - \frac{2}{7} D_x) \frac{1}{\varphi} \theta + \frac{1}{7} x^3 D_x^2 \right\}$$ とおくと，

$$(s - X_0 + c)(s - X_0) - \frac{1}{(210)^2}\left(Q + \frac{90x}{\varphi}(3s - 5X_1 + 2X_0)\right)$$

ここで，第二項にある $xs$ は，微分作用素にかえることはできない.

$\boxed{71}$, $\boxed{81}$ 主項の固有ベクトルはない. 代りに $\boxed{00}$ $\boxed{10}$ から $\frac{7}{15}$, $\frac{17}{30}$ が出る.

$$b(s) = (s+1) \cdot (s + \tfrac{5}{6})(s + \tfrac{7}{6}) \cdot (\underset{\boxed{00}}{s + \tfrac{7}{15}})(\underset{\boxed{10}}{s + \tfrac{8}{15}}) \cdots (s + \tfrac{19}{15})$$
$$(\underset{\boxed{00}}{s + \tfrac{13}{30}})(\underset{\boxed{10}}{s + \tfrac{17}{30}})(s + \tfrac{19}{30}) \cdots (s + \tfrac{41}{30})$$

… は既約分数をとっていく.

## §.5.　より複雑な場合について.

§.2.3において，さまざまな場合をしらべたとはいえ，いずれも，簡単な場合だということもできよう．複雑な場合では，興味ある問題は ch.index $\geq 2$ でおこるであろうし，link では，§3の形にかけないような，成分の多い場合をしらべる必要がある．

現在の手法では，それらの計算はかなり困難であるが，いずれ，それらについても明らかになるであろう．ともかく現段階においては，2つの実例によって，その複雑さを，かいまみることとしたい．これらの場合，第三章でいうところの，simplex type と本質的にことなるが故に，非常にややこしくなる．（もっとも，§3のS型以外は non-simplex type ではあるが，できた）．

1.　$(x^3-y^2)^2-x^2y^3$　（佐藤幹夫）．ch.index = 2.
　$S(2.3)$
　$b(s)$ は Alexander poly と うまくあう．作用素がおもしろい．

2.　$(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$
　$\chi(t)$ に $t^{10}-1$ という factor があり，それがどのような作用素に原因するものか，現在のところ不明である．

1. $S(2,3)$ $\quad (x^3-y^2)^2-x^2y^3$. （佐藤幹夫）
の計算を整理した

ch. pairs $\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\right)$, $\mu=16$ $\quad \Omega: f=(x^3,y)$

§1. Theorem 2 より $\quad \Delta(t)=\dfrac{(t^6+1)(t^{13}+1)}{(t^2+1)(t+1)}$

$$X_0=\frac{1}{12}(2xD_x+3yD_y) \qquad (s-X_0)f^s=\frac{1}{12}x^2y^3 s f^{s-1}$$

$$Y_1=\frac{1}{8}(xD_x+2yD_y). \qquad Y_2=\frac{1}{18}(3xD_x+4yD_y)$$

$$\theta=2yD_x+3x^2D_y \qquad (X_0 \text{ に関して exact } \tfrac{1}{12}\text{次})$$

$$\varphi=1+\frac{81}{4\cdot 13^2}x.$$

一階. $x^2(s-X_0)+\dfrac{3}{4\cdot 13\varphi}\left\{(4y+\frac{27}{13}x^2)xX_0+(y-x^2)\frac{\theta}{3\cdot 13}-(\frac{27}{13}x^2+4y)Y_2\right\}$

$y(s-X_0)+\dfrac{27}{4\cdot 13\varphi}\left\{(\frac{3}{13}y-x)xX_0+(\frac{y}{4\cdot 13}+\frac{x}{27})\frac{\theta}{3}+(x-\frac{2}{13})xY_2\right\}$

二階. 少し計算になれていると，二階主要部は

$(s-X_0)(s-\frac{12}{13}X_0+\frac{1}{26})$ － 又は $(s-X_0)(s-\frac{1}{26}(4xD_x+7yD_y))$

であるべきことがわかる。計算は困難であるが，佐藤はそれを遂行し，二階の作用まで決定した．その主要部は，（もう少しcheckしてみることもあるが）

$$(s-X_0)(s-\frac{12}{13}X_0+\frac{1}{26})+\cdots \qquad \text{である}$$

$\boxed{00}$ から $(s+\frac{5}{12})(s+\frac{11}{26})$ ，$\boxed{10}$ から $(s+\frac{7}{12})(s+\frac{15}{26})$

その他からは simple で，

$$b(s)=(s+1)\cdot(s+\frac{11}{26})(s+\frac{15}{26})(s+\frac{17}{26})(s+\frac{19}{26})\cdots\cdots(s+\frac{33}{26})(s+\frac{35}{26})$$
21, 23, 25, 27, 29, 31
$$(s+\frac{5}{12})(s+\frac{7}{12})(s+\frac{11}{12})(s+\frac{13}{12})$$

これは $\Delta(t)$ と一致する。

一般の $S(p,q)$ $\quad Y(p,q)$ についても，多少わかっていることあり．

2. $(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$

A'Campo によれば $\chi(t)=(t-1)(t^8-1)(t^9-1)(t^{10}-1)$
これでは，どう考えても $s^3+\cdots$ まで必要であろう．
$s^2+\cdots$ ですむとはおよそ考えがたい．

実は，計算は実行中であって，まだできていない．
この例でも，Newton polygon をかいてみると，non-simplex type であり，つき出た3つの faces に対応する operators は

$\frac{2}{9}xD_x+\frac{1}{9}yD_y$, $\frac{3}{16}xD_x+\frac{1}{8}yD_y$, $\frac{1}{8}xD_x+\frac{1}{4}yD_y$. である．

よって，
$$\frac{2}{9}xD_x+\frac{1}{9}yD_y \longrightarrow (t^9-1)$$
$$\frac{1}{8}xD_x+\frac{1}{4}yD_y \longrightarrow (t^8-1)$$
とおもえる

しかし，$(t^{10}-1)$ は何だろう？

$x^2y^6$ と $x^4y^2$ をむすぶ線分に対応して，
$\frac{1}{5}xD_x+\frac{1}{10}yD_y$ というのが出てきて，これによって $(t^{10}-1)$ が出ているとおもうのはもっともである．
しかし，$x^2y^6$ は $x^2y^5=y^3\times x^2y^2$ の倍数であって，そんなものがきいてくるというのも，変な話である。
この場合，$\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{2}{9}xD_x+\frac{1}{9}yD_y\right)=\frac{1}{5}xD_x+\frac{1}{10}yD_y$ とおもうのがよい．
2変数の場合，既約でなくとも，isolated sing になるという事情も，あるいは反映しているかもしれないが，$+z^2$ とでもすれば既約になるから，そうもおもえない．
ともかく，事情は複雑である。

# 第三章. Simplex type polynomials.

一般的に予想Kが成立し，又 $b(s)$ の計算もやりやすい多項式の系列に，標記のものがある．この場合は，$b(s)$ も，$f(x)$ の Newton polyhedron と ideal 達をみているだけで，かなりわかる。計算されている実例は，殆どこのタイプに属する．ただし，この章では $f(x)$ は non-isolated でもよい．

## §.1. 準備. $\mathbb{N}_0^n$ の subset について.

$m^{(j)} = (m_1^{(j)}, \cdots, m_n^{(j)}) \in \mathbb{N}_0^n$. $j = 1, \cdots, J$　point とも vector とも思う.

$M = \{m^{(1)}, \cdots, m^{(J)}\}$　set とも，complex とも思う．$\underline{\underline{m^{(j)} \neq 0}}$

Def. 1　$\underline{m \prec m'}$ とは，$\forall i$, $m_i \leq m_i'$.

$M$ が sweepable であるとは，$\exists j_1 \neq j_2$, $m^{(j_1)} \prec m^{(j_2)}$

このような $m^{(j_2)}$ を $M$ からすべてのぞいた，残りの集合を $\widetilde{M}$ (sweeped $M$) という．上の $m^{(j_2)}$ は，$m^{(j_1)}$ によって sweep out された元 という．

Def. 2　$\widetilde{M}$ が $n$-simplex であるとき，$M$ を simplex type という．

**Theorem.3** $M$: simplex type ならば，canonical な分割
$M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup M_3$ があり，$M_1 = \{m^{(0)}, \dots, m^{(k-1)}\}$
$M_2 = \{m^{(k)}, \dots, m^{(K-1)}\}$ $M_3 = \{m^{(K)}, \dots, m^{(n)}\}$ に対し，
$\exists\, l_0, \dots, l_{K-1} \in \mathbb{N}_0$ s.t.
① $l_0 + \dots + l_{k-1} = l_k + \dots + l_{K-1}$. $(= l$ とする$)$
② $l_0 m^{(0)} + \dots + l_{k-1} m^{(k-1)} \prec l_k m^{(k)} + \dots + l_{K-1} m^{(K-1)}$.

∵) $\tilde{M}$ が $n$-simplex をなすならば，vector として
$$\alpha_0 m^{(0)} + \dots + \alpha_n m^{(n)} = 0 \quad \text{---} (*) \qquad (\alpha) \neq 0$$
という relation が成立し，しかも $(\alpha)$ は mod. $\mathbb{Q}^*$ で unique. そこでまず $\alpha_i = 0$ となる $m^{(i)}$ を $M_3$ に入れる. これを $m^{(K)} \cdots m^{(n)}$ とする.
次に $\alpha$ 達を同符号のものでまとめて
$$-(\alpha_0 m^{(0)} + \dots + \alpha_{k-1} m^{(k-1)}) = \alpha_k m^{(k)} + \dots + \alpha_K m^{(K)}$$
$\alpha_0 \cdots \alpha_{k-1} < 0$, $\alpha_k, \dots, \alpha_{K-1} > 0$ とする.
ここで $-(\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) > (\alpha_k + \dots + \alpha_n)$ としよう. もしくならば，番号をつけかえる。(= ならば hyperplane 上にのる). ここで，$-\alpha_0, \dots, -\alpha_{k-1} (\geq 0)$ を各々適当に小さくして（しなくてもいい）$\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ として
$$\beta_0 + \dots + \beta_{k-1} = \alpha_k + \dots + \alpha_K \text{ とする.}$$
すると当然
$$\beta_0 m^{(0)} + \dots + \beta_{k-1} m^{(k-1)} \prec \alpha_k m^{(k)} + \dots + \alpha_K m^{(K)}$$
ここで，$\beta$ のとり方は，この式を定理の②の形にかきなおす，i.e. 分母をはらったときに，① の値 $l$ がなるべく小さくなるようにとるべきである。∎

**Def.4** hyperplane $h(x)=1$. ($h(x)=\sum a^i x_i$) に associate した vector field or. (1st order differential) operator とは，
$$X=\sum a^i x_i D_i$$
のこととする。

$\tilde{M}$ は simplex であるから，各 vertex $m^{(i)}$ に対して，それを通らない face が unique に存在する。その定義式を $h_i(x)=1$ とする。今後，番号はこのようについているとする。

$\tilde{M}$ が sweep out されたものだからといって，すべての faces $h_j(x)=1$ について $h_j(x)=\sum a_j^i x_i$ の $a_j^i>0$ とはいえない。しかし Theorem の番号づけでいって，
$h_k(x)=1, \ldots, h_{K-1}(x)=1$ についてはこの positivity がいえるはずだと思っている。ついでながら，

**Def.5** $m^{(j)} \to h_j(x)=1 \to X_j$ と対応したとき，さらに
$$c_j=\sum_i a_j^i m_i^{(j)}-1$$
とおく。

**Prop.6** Theorem の $M_2$ に表われたものについては，positivity が成立. i.e. ① $h_j(x)=\sum a_j^i x_i=1$ とするとき，$a_j^i>0$ $j=k,\ldots,K-1$.

② $c_j>0$ $j=k,\ldots,K-1$.

~~(実はこの Prop. 証明は現在不完全. Conj. としておこう)~~
これは一般にはだめ. isolated sing ならいいのであろうか?

Def.7 $\tilde{M} = M$ であるとき, strict simplex type という.
その典型的例は.

◎ $T_{(n);(m)}$ : $m^{(0)} = (m_1, \cdots, m_n)$ $m_i < n_i$
$m^{(i)} = (0, \cdots, \underset{\hat{i}}{n_i}, 0 \cdots 0)$ $i = 1, \cdots, n$.

Prop 8 $T_{(n);(m)}$ に対しては, Theorem における $l$ について

$$l \leq \min_i (N_i) \qquad N_i = n_1 \cdots \check{n_i} \cdots n_m .$$

証明は, Theorem のやり方と少し異なるが, 要するに induction. これは省略する。

Def 9 Theorem において $M_3 = \phi$ であり,
$\# M_1 = 1$ のとき type $\triangle$
$\# M_2 = 1$ 〃 type $\nabla$ となづける。
この場合, 番号づけには特別の約束をもうける.
$\# M_1 = 1$ の場合は Theorem と同じく $M_1$ の元を $m^{(0)}$.
$\# M_2 = 1$ の場合は特に, $M_2$ の元を $m^{(0)}$ とする。

例: $T_{(n);(m)}$ では $c = \sum \frac{m_i}{n_i} - 1$ に対して.
$c < 0 \Rightarrow$ type $\triangle$
$c > 0 \Rightarrow$ type $\nabla$

## §. 2. simplex type polynomial と予想 K.

$f(x)$: polynomial (一般に hol. fn でもよい) $f(0)=0$.
$f(x)$ に表われる monomial の中の multi index 全体の集合を $M_f$ とし, §.1 の結果を色々適用する。

**Def. 10.** $M_f$ : simplex type のとき, $f$ を simplex type という.
$\tilde{M}_f$ に対応する monomial のみを残した多項式を $\tilde{f}(x)$ とし, sweeped $f$ という.

※. 実は座標変換 $x=x(X)$ により, $f(x(X))=g(X)\tilde{f}(X)$ $g(0)\neq 0$ とできる. ※

以下, $M_f$ の元と monomial を同一視し, $\tilde{f}(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_j m^{(j)}$ などとかく. たとえば Def 5 は $c_j=\dfrac{X_j m^{(j)}}{m^{(j)}}-1$.

**Theorem 11.** $f$: simplex type. $\tilde{f}$ の monomials は Theorem 3 のように番号づけられているとする.
このとき, $\exists\, s^l+\cdots\in g[s]$ $l$ 階で, その主要部は

$$P_j(x,D)=(s-X_j+(l_j-1)c_j)\cdots(s-X_j+c_j)(s-X_j)$$

とし, $P_k(x,D)\cdot P_{k+1}(x,D)\cdots P_{K-1}(x,D)$ である。

**lemma 12.** $f$: simplex type とすれば,
$\exists\, L_j(s,x,xD)=(s-X_j)+(\cdots\text{higher order})$
ここに $L_j$ は $x_iD_i$ に関して整理した, (または $X_i$ から構成される) 主要部が $s-X_j$ である一階の作用素.
1 により

$$L_j(s,x,xD)f^{s}=\alpha_j c_j m^{(j)} s f^{s-1}. \qquad 1.$$

但し $\tilde{f}(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j m^{(j)}$

∵) $f - X_j f = \alpha_j c_j m^{(j)} + \sum_k \varphi^j_k m^{(k)}$ $\quad \varphi^j_k \in \mathfrak{m}$.

これを, $m^{(j)}$ に関する連立一次方程式とおもいとけば,

$\alpha_j c_j m^{(j)} = (f - X_j f) + \sum \psi^k_j (f - X_k f)$ $\quad \psi^k_j \in \mathfrak{m}$.

この方程式からただちに $L_j$ がもとまる. ∎

そこで, 第一章の Prop. p.13 を用いるために,

$Q_j(s) = L_j(s-(l_j-1), x, xD-(l_j-1)m^{(j)}) \cdots L_j(s-1, x, xD-m^{(j)}) L_j(s, x, xD)$

とおく. ここで $m^{(j)}$ は multi index の意味になっている.

$X_j m^{(j)} = (c_j+1) m^{(j)}$ に注意すれば,

$$Q_j(s) = (s - X_j + (l_j-1)c_j) \cdots (s - X_j + c_j)(s - X_j) + (\cdots)$$

そして, Prop より $Q_j(s) f^s = (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} s^{(l_j)} f^{s-l_j}$

$s^{(a)} = s(s-1)\cdots(s-a+1)$.

他の $Q_k(s)$ も同様に定める. $X_k m^{(j)} = m^{(j)}$ $\quad k \neq j$

に注意すれば,

$$\begin{cases} Q_0(s) Q_1(s) \cdots Q_{k-1}(s) f^s = \prod_0^{k-1} (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} s^{(l_0+\cdots+l_{k-1})} f^{s-l} \\ Q_k(s) \cdots Q_{K-1}(s) f^s = \prod_k^{K-1} (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} s^{(l)} f^{s-l} \end{cases}$$

定理3 より

$$\prod_0^{k-1} (m^{(j)})^{l_j} \;\Big|\; \prod_k^{k-1} (m^{(j)})^{l_j}$$

$$\therefore\ Q_k(s) \cdots Q_{K-1}(s) - \frac{\prod_k^{K-1} (\alpha_j c_j)^{l_j}}{\prod_0^{K-1} (\alpha_j c_j)^{l_j}} \cdot \frac{\prod_k^{K-1} (m^{(j)})^{l_j}}{\prod_0^{K-1} (m^{(j)})^{l_j}} Q_0(s) \cdots Q_{K-1}(s) \in \mathcal{D}[s].$$

定理の証明 ∎

Th. 11 でわかるように, $X_{\bar{k}}, \cdots, X_{k-1}$ が事態を支配しており, Prop. 6 の成否は, 大変重要である。

これについて, ある不都合とおもわれる ~~[illegible]~~ 例がある.
それについては, Non-isolated case 参照のこと.

## § 3. $T_{(n);(m)}$ （又は ${}_N T_{(n);(m)}$）

$$ {}_N T_{(\vec{n});(\vec{m})} = \frac{1}{n_1} x_1^{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_N} x_N^{n_N} - t\, x_1^{m_1} \cdots x_N^{m_N} $$

$C = \sum \frac{m_i}{n_i} - 1.$ $\begin{cases} C<0 & \text{で type } \Delta \\ C>0 & \text{で type } \nabla \quad \mu = \prod (n_i - 1) \\ C=0 & \text{は weighted hom } \left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}\right) \end{cases}$

Prop. 8 により.

**Prop. 13.** ${}_N T_{(\vec{n});(\vec{m})}$ に対しては, $L(f) \le \min_i (N_i)$

$N_i = n_1 \cdots \check{n}_i \cdots n_N$.

$$ X_0 = \sum \frac{1}{n_i} x_i D_i \qquad X_j = X_0 - \frac{c}{m_j} x_j D_j $$

Theorem 11 は, この場合次のようになる.

$C_j = -\frac{n_j}{m_j} C$ であり, $>0$ if type $\Delta$ (i.e. $C<0$)

**Theorem 14.** ${}_N T_{(\vec{n});(\vec{m})}$ について, $\underline{\underline{l = \min(N_i)}}$ とすれば,

$C>0$. $\exists\, P(s)$ $l$ 階 $\in \mathcal{O}[s]$ s.t.

$$ P(s) = \prod_{\nu=0}^{l-1} (s - X_0 + \nu C) + \cdots\cdots $$

$C<0$. $P_j(s) = \prod_{\nu=0}^{l_j - 1} (s - X_j + \nu C_j)$ として,

$$ P(s) = \prod_{j=1}^{N} P_j(s) + \cdots\cdots \qquad \sum l_j = l. $$

•

一般に, min $(N_i)$ 以下で上のことが成立するのは, いうまでもない. その簡単な判定法を紹介しよう.

$L(f)$ の判定法

(i) $n \succ Nm$ (i.e. $n_i \geq Nm_i \ \forall i$) $\Longrightarrow$ $L(f) \leq N$.

$$(s - X_1)(s - X_2)\cdots(s - X_N) + \cdots \in \mathfrak{f}[s].$$

(ii) $n \prec Nm$ $\Rightarrow$, $n \prec N'm$ となる最小の $N'$ をとって,
$L(f) \leq N'$ これは, もっとくわしくできて,

(iii) (i)以外の場合に, $n_i \leq \nu_i m_i$ となる最小自然数 $\nu_i$ をとる.
($m_i = 0$ のときは, $\nu_i = \infty$ とおく) 今, $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots$ と仮定する
このとき, $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_\ell = \ell$ となる $\ell$ が存在すれば,
その初めての $\ell$ をとれば $L(f) \leq \ell$.

example $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{9}y^9 + \frac{1}{5}z^5 - xy^5z^3$ では, (i) (ii) のどちらでもないが, (iii) によって, $\ell = 2$ となる. 実際.

$$(s - X_0 + c)(s - X_0) + \cdots \quad \text{が求まる}$$

$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}y^9 + \frac{1}{8}z^8 - x^3y^3z^2$ は, 上の簡易判定法ではわからない. $c > 0$ であって, Th.11 はこの場合,

$$(s - X_0 + 3c)(s - X_0 + 2c)(s - X_0 + c)(s - X_0) + \cdots$$

でとれる。

Th.14 の $\min(N_i)$ というのは, わりあいましである.

$c > 0$ では $\mu = \prod(n_i - 1)$

$c < 0$ では 複雑だが $\mu \sim \mathrm{cte}(\max N_i)$ という order.

いずれにせよ, 加藤の定理から symbol でわかっていた

$L'(f) \leq \mu$ よりも ましな評価といえる.

$n_1 = \cdots = n_N = n$. $m_1 = \cdots = m_N = m$ ならば

色々なこと，比較的よくわかる.

たとえば $\mathfrak{a} \ni x_1^{m-1} x_2^{2m-1} \cdots x_N^{Nm-1}$ など. if $c<0$.

example. ${}_3T_{(n):(m)}$ $\frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{m}(xyz)^m$

$n < 3m \Rightarrow$. $(s - X_0 + 2c)(s - X_0 + c)(s - X_0) + \cdots$

$n = 3m \Rightarrow$ $f$ homogeneous order $n$. $(s - X_0) f^s = 0$.

$n > 3m$. $\Rightarrow$ $(s - X_1)(s - X_2)(s - X_3) + \cdots$

ideal 達の状況は，$n$ を十分に大きくしないとはっきりしない.

$n \geq 5m-2$

$$f_x = x^{n-1} - x^{m-1}(yz)^m \quad \text{etc.}$$

$$\mathfrak{a} \ni x^{m-1} y^{2m-1} z^{3m-1},\ x^{2m-1} y^{n+m-1},\ x^{n+2m-1} y^{m-1},\ x^{2n+m-1}, \cdots$$

$$\mathfrak{a} : (f) = (x^{m-1} y^{2m-1}, \cdots, x^{n-m} - (yz)^m, \cdots)$$

すべて cyclic. symmetric.

$$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a} : f = (2m-1)^3 + 3(m-1)^2(n-3m+1)$$

$$= 3(m-1)^2 n - (m-1)(m^2 - 8m + 1) + 1$$

特に $m=2$ ですでにおもしろい. 次§.

## §4. 特に $_3T_{n;2}$ について. 予想 $S_{\mathscr{D}}$, $KS_{\mathscr{D}}$ の反例.

予想 S, KS は、当初成立するのではとおもわれていた. それは、微分作用素の sheaf が、非可換であるにもかかわらず、色々と美しい性質をもつことが、偏微分方程式論において知られていたからである. 予想 KS については、一時、難解な証明も存在した。その誤りが三輪により見出され、成立は危まれたが、まずSに反例があらわれ、さらに予想KSも不成立となった。以下 $_3T_{n;2}$ が反例となることをのべる.
$n \geq 8$ が条件としてつく。$n=7$ は、特殊な状況がおこり、全くと別の興味もあるが、ここにはのせない. 又、次元を4次元以上に[redacted]しても、同様である[redacted]
それについても色々検討中である。

微分作用素で行うのに不都合があるなら、擬微分作用素にすべてをもちこむべきかもしれない. (といってもKSも不成立では—)

反例は、次のようにしてつくられる.

∃ $p_2(s,x,\xi)$ ($s,\xi$ につき2次) s.t. $p_2(f,x,df)=0$.

∃ $P_2(s,x,D)$ s.t. $\sigma(P_2)=p_2$ and

$$P_2(s) f^s = s(xy)^{n-2} f^{s-1}.$$

しかるに $(xy)^{n-2} \notin \mathfrak{a}+f$. よって第一章 Prop 5 より予想Sは不成立. さて、もし予想KSが成立するなら、十分大きな $l$ をとれば $\xi^l p_2(s,x,\xi)$ $(\xi \leftrightarrow D_x)$ を主部とするような、$l+2$ 階の作用素 $D_x^l P_2(s,x,D)+Q_{l+1}(s)$ が存在するはずである. これもだめなことがわかり、予想KSもくずれる. 計算はくわしくかいてある.

尚、参考のため、$_3T_{8;2}$ の $\mu$ の代表元、$\mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$ の代表元の表を Appendix 5 としてつけておいた

${}_3T_{n;2}.$ $\quad \frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{2}(xyz)^2$

$2 \le n \le 5.$ strict simplex type

$n = 6.$ ~~homogeneous~~ polynomial.

$n = 7$ } strict simplex type $\Delta$

$n \ge 8$ $\quad$ $n=7.$ と 8以上では、ideal 等のぐあいが変る。

以下 $n \ge 8$ とする。 $\quad c = -\frac{n-6}{n} < 0.$

$\mu = 3n(n+1) - 1$

1. ideals.

① $\mathfrak{a} \ni xy^3z^5,\ xy^{n+3},\ x^3y^{n+1},\ x^{2n+1},\ \underset{f_x}{x^{n-1} - xy^2z^2}, \cdots$ cyclic symmetric.

② $\mathfrak{a} : f = (x^{n-2} - y^2z^2, \cdots, xy^3, \cdots)$ cyclic symmetric.

$\ni x^{n+1},\ x^{n-2}y, \cdots$ $\quad \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f = 3n+12$

③ $\mathfrak{a} : f^2 = \mathfrak{m}$

④ $\mathbb{C}f + \mathfrak{a} \ni x^n, y^n, z^n, (xyz)^2,$ ~~$\mathfrak{a}+(f) \ni$~~

⑤ $\mathfrak{a} + (f) \ni x^{n-1}y^{n-2},\ x^{n-2}y^{n-1},\ (xy)^{n-2}z$ …… but $\not\ni (xy)^{n-2}$

⑥ $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}f : f^2 / \mathfrak{a} : f = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$

⑦ $\mathfrak{a}^3 + \mathfrak{a}^2 f + \mathfrak{a} f^2 \ni f^3.$

(n=7 では ① などはよいが ⑥ は不明)

2. operators.

$\boxed{i,j,k}$ は $\delta$ 函数ではなく、$\boxed{i,j,k}f = x^i y^j z^k$ となる一階の微分作用素をあらわす。又、$\varphi = 1 - (xyz)^{n-6}.$

(i) ① → $\boxed{3\,1\,5} = \frac{-1}{\varphi}(y^{n-3}z D_x + xz^3 D_y + x^{n-3}y^{n-5} D_z)$

$\boxed{n+1,0,3} = \frac{-1}{\varphi}\{(y^{n-2} + y^{n-6}(xz)^{n-4} - x^2z^2)z D_x + xyz^3 D_y + x^{n-3}y^{n-5} D_z)$

$\boxed{n+3,1,0} = \frac{-1}{\varphi}\{(-x^4 + x^{n-2}(yz)^{n-6} + y^{n-4}z^{n-6})y D_x + xz^{n-4} D_y + x^3yz D_z)$

$D_x f = x^{n-1} - xy^2z^2$

⑤ →
$$X_0 = \frac{1}{n}(xD_x + yD_y + zD_z)$$
$$X_1 = \frac{n-4}{2n}xD_x + \frac{1}{n}yD_y + \frac{1}{n}zD_z, \quad X_2 = \cdots\cdots$$
$$f - X_0 f = \frac{c}{2}(xyz)^2, \quad f - X_1 f = \frac{c}{2}x^n, \cdots\cdots$$
$$x^{n-2}y^{n-1} = x^{n-2}D_y + \frac{2}{c}yz^2(f - X_1 f), \cdots$$
$$(xy)^{n-2}z = x^{n-5}y^{n-7}z^{n-6}\boxed{1\,3\,5}f - (xy)^{n-4}f_z$$
$$= \frac{2}{c}(xy)^{n-6}z^{n-3}(f - X_0 f) - (xy)^{n-4}f_z.$$

$\mathfrak{a} + f = (x^{n-1} - xy^2z^2, y^{n-1} - x^2yz^2, z^{n-1} - x^2y^2z, x^2y^2z^2)$ に注意せよ. $z = 0$ とおいてみれば $(xy)^{n-2} \notin \mathfrak{a}+f$ がわかる.

(ii) $\mathfrak{g}[s]$ 生成元の決定.

一階.
$$xy^3(s - X_3) - \frac{c}{2}z^{n-5}\boxed{1\,3\,5}$$
$$x^3y(s - X_3) - \frac{c}{2}z^{n-5}\boxed{3\,1\,5}$$
$$(x^{n-2} - y^2z^2)(s - X_1) - \frac{c}{2}x^{n-2}(xD_x) = (x^{n-2} - y^2z^2)(s - X_0) - \frac{c}{2}y^2z^2(xD_x)$$

二階は色々奇妙なことがおこるので, あとまわし.

三階.
$$(s - X_1)(s - X_2)(s - X_3) + \frac{c}{4}(xyz)^{n-6}(B_1 s^2 + B_2 s + B_3)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\langle x, D\rangle - 3$$
$$B_2 = -\frac{1}{n}\left(S_2' + \frac{n-2}{4}S_2 - 5\langle x, D\rangle - 2(n-6)\right)$$
$$B_3 = \frac{1}{2n^2}\left\{\left(S_2' + \frac{n-4}{2}S_2 - 6\langle x, D\rangle - 4(n-6)\right)\langle x, D\rangle + \frac{(n-6)^2}{4}xyz\,D_xD_yD_z\right\}$$

ここに $S_2 = xyD_xD_y + yzD_yD_z + zxD_zD_x$, $S_2' = (xD_x)^2 + (yD_y)^2 + (zD_z)^2$

二階と一階の作用素を用いて, $B_1 = B_2 = 0$ にとりなおすこともできる.

二階.

$z^2 \in \mathcal{O}^2 + \mathcal{O}f : f^2$ but $\neg\exists\, z^2 s^2 + \cdots$ in $\mathcal{J}[s]$ は,

二階の作用素の存在に関する判定法 (p. ) から従う.

即ち, $(xy)^{n-2} \notin \mathcal{O} + f$ がきいてくる. というのは,

$$(s - X_1)(s - X_2) f^s = \left(\frac{c}{2}\right)^2 (xy)^n s(s-1) f^{s-2}$$

$$\boxed{351}\,\boxed{531}\, f^s = s(s-1)(xy)^8 z^2 f^{s-2} - \frac{s}{\varphi}\{(xy)^6 + x^4y^2z^{n-4}(5y^2z^2+3x^{n-2})\} f^{s-1}$$

よって, $Q_z^1 = z^2(s-X_1)(s-X_2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 (xy)^{n-8}\,\boxed{351}\,\boxed{531}$

$Q_z^2 = \quad$ 〃 $\quad - \quad$ 〃 $\quad \boxed{531}\,\boxed{351}$ として

$Q' = \frac{1}{2}(Q_z^1 + Q_z^2) - \frac{3c^2ns}{2^3\varphi}(xy)^{n-6} z^{n-4}$ 　さらに

$Q'' = Q' - \frac{1}{\varphi}(xy)^{n-8} z^{n-4}\left((5 + \frac{3n}{4})(xyz)^2 - \frac{3}{2}z^n\right)(s - X_0)$ 　とおけば,

$Q''$ は $x, y$ について対称であって,

$$Q'' f^s = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{s}{\varphi}(xy)^{n-2} f^{s-1}. \quad \text{あるいは}$$

$Q = Q' - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} x^{n-6}(yz)^{n-7}\left\{x\left(\frac{13}{2} + \frac{3n}{4}\right)\boxed{135} - \frac{3}{2} y z^4 D_z\right\}$ でも

$$Q f^s = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{s}{\varphi}(xy)^{n-2} f^{s-1}.$$

好むならば $x, y$ に関し対称に修正もできる. ともかく,

$$\sigma(Q)(f, x, df) = \sigma(Q')(f, x, df) = 0.$$

しかるに $(xy)^{n-2} \notin \mathcal{O} + f$ より $\sigma(Q)$ をかえずに,

$f^s$ を零化するような作用素はとれない.

即ち, 予想 $S_g$ の反例がこれである.

それでは, これを多少修正することを考えよう.

$z Q f^s = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi}\left\{x^{n-5}y^{n-7}z^{n-6}\,\boxed{135} - (xy)^{n-4}D_z\right\}$ より,

$$\boxed{z Q - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} x^{n-5}y^{n-7}\left\{z^{n-6}\,\boxed{135} - x y^3 D_z\right\} \in \mathcal{J}[s].}$$

i.e. $z^3 s^2 + \cdots \in \mathcal{J}[s]$.

又，$\mathcal{P}$へ拡大して求めようとおもえば，まず

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 D_z Q f^s = \frac{(n-6)s}{\varphi^2}(xy)^{2n-8}z^{n-7}f^{s-1} + \frac{s(s-1)}{\varphi} z\left((xyz)^{n-2} - (xy)^n\right) f^{s-2}$$

これをじっとながめて，次のように $R$ を求めれば，

$$R = \frac{z}{\varphi}\left\{\frac{(n-6)c}{2\varphi}(xyz)^{n-8}(s-X_2) + (xyz)^{n-6}(s-X_0+c)(s-X_0) - (s-X_1)(s-X_2)\right\}$$

$$\boxed{D_z Q - R \in \mathcal{J}[s].} \quad \text{i.e.} \quad (D_z z^2 + z)s^2 + B_1' s + B_2' \in \mathcal{J}[s].$$

尚 $n \geq 10$ では $R' = \left(\frac{c}{2\varphi}\right)^2 (n-6) x^{2n-13} y^{2n-11} z^{n-8} \boxed{531} -$

$$- \frac{z}{\varphi}\left\{(s-X_1)(s-X_2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 (xyz)^{n-10}\left(\boxed{135}\boxed{521} + \frac{xy}{\varphi}\left(5y^{n-6}z\boxed{351} + 2z\boxed{531} + y^{n-6}\boxed{n+1\ 3\ 0}\right)\right)\right\}$$

としても

$$D_z Q - R' \in \mathcal{J}[s].$$

それでは，$D_x Q + S \in \mathcal{J}[s]$ ? うまくいかない．実は，$\ell$をどんなに大きくしても，$D_x^\ell Q + S$ の形の作用素はとれないことがわかる．そしてこれは，

<u>予想 $KS_{\Omega}$ の反例</u> をあたえる．さて証明．

$P_2(s) = \varphi\left(\frac{2}{c}\right)^2 Q$ とおくと，

$P_2(s) f^s = s(xy)^{n-2} f^{s-1}$.

今もし，$\exists \ell$，修正項 $Q_{\ell+1}(s)$ (total order $\ell+1$ 階以下) により

$\left(D_x^\ell P_2(s) + Q_{\ell+1}(s)\right) f^s = 0$ になったとせよ．

第一項の作用した分は

$s(s-1)\cdots(s-\ell)(xy)^{n-2} f_x^\ell f^{s-1-\ell}$ + ($s$について$\ell$次以下)

第二項のそれは

$s(s-1)\cdots(s-\ell)\left[(\mathcal{O}+\mathcal{J}f)^{\ell+1}\text{の元}\right] f^{s-1-\ell}$ + ($s$について$\ell$次以下)

よって，$(xy)^{n-2} f_x^\ell \in (\mathcal{O}+f)^{\ell+1}$ でなければならない

(これらの注意は柏原氏による)

$$f_x = x^{n-1} - xy^2z^2, \quad \mathcal{U}+f = (x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}, x^2y^2z^2)$$

よって　$z=0$ とおけば，

$$(xy)^{n-2}x^{(n-1)l} \in (x^{n-1}, y^{n-1})^{l+1} \quad \text{でなければならぬ.}$$

ところが

$$\begin{array}{c} \| \\ x^{(n-1)(l+1)-1}\, y^{n-2} \end{array}$$

であり，いかなる $l$ についても かようなことはおこらない。　$D_x^{l_1} D_y^{l_2} P_2(s) + \cdots$ は

$$x^{(n-1)(l_1+1)-1}\, y^{(n-1)(l_2+1)-1} \in (x^{n-1}, y^{n-1})^{l_1+l_2+1} \quad ?$$

となるが，これもどんな $l_1, l_2$ をとっても成立しえない。

よって，$z^2s^2 + \cdots\cdots$ は $\mathcal{P}\otimes g[s]$ でも存在しない。
globalには，

しかし，$\xi \neq 0$ では存在する（$\xi$は $D_z$ の symbol）

さて，$xy,\ yz,\ zx$ についてはどうだろうか。とれる。
今まででも $n-8$ がよく出てきて謎だとおもいだが，

$$yz(s-X_1)(s-Y_1+c) + \left(\frac{c}{2}\right)^2 x^{n-2} D_y D_z - \left(\frac{c}{2}\right)^2 x^{n-8}(yz)^{n-7}\boxed{351}\,\boxed{815}$$
$$+ \frac{c^2}{44} x^{n-8}(yz)^{n-7}\left\{(3z+5(xy)^2)\boxed{135} + (xy)^{n-4}\boxed{315}\right\}$$

ここに $Y_1 = \frac{1}{n}xD_x + \frac{n-4}{2n}yD_y + \frac{n-4}{2n}zD_z = X_0 - \frac{c}{2}(yD_y + zD_z)$

どうもキミョーなものが出てくる。$c<0$ に注意すべし。

尚，あまり意味ないが，$(xyz)^2s^2 + \cdots$ というへんだと，主要部はかなりすきかってになって，

$$(xyz)^2(s - X_0 + c)(s - X_0) + \cdots$$

$$(xyz)^2\left(s - \frac{1}{6}\langle x, D\rangle\right)(s - X_0) + \cdots$$

などと，もっともらしいのがある。しかし $xyzs^2$ では

$$xyz\left\{s^2 - \left(\frac{n-2}{2n}\langle x, D\rangle + \frac{n-6}{n}\right)s + \frac{n-6}{n^2}\left(\frac{1}{2}\langle x, D\rangle - \frac{n-3}{3}\right)\langle x, D\rangle + \frac{2}{3}S_2\right\} + \cdots\cdots$$

話が前後するが，$z^2s^2+\cdots$ を修正して $yz^2s^2+\cdots$ を求めてみれば次のようなことになる．

$$yQf^s = \left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{s}{\varphi}x^{n-2}y^{n-1}f^{s-1}$$
$$= \left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{1}{\varphi}\left(x^{n-2}D_y + \frac{2}{c}yz^2(s-X_1)\right)f^s$$

$$\therefore\ yQ - \frac{c}{2}yz^2(s-X_1) - \left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{1}{\varphi}\left(x^{n-2}D_y + \frac{2}{c}x^{n-6}y^{n-5}z^{n-4}(s-X_1)\right)$$
$$= yz^2(s-X_1)\left(s-X_2-\frac{c}{2}\right) - \frac{c^2y}{2^3}(xy)^{n-8}\left(\boxed{351}\,\boxed{531}+\boxed{531}\,\boxed{351}\right)$$
$$- \frac{3c^2ns}{2^3\varphi}x^{n-6}y^{n-5}z^{n-4} - \left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{1}{\varphi}(xy)^{n-6}z^{n-7}\left\{x\left(\frac{13}{2}+\frac{3n}{4}\right)\boxed{135} - \frac{3}{2}yz^4D_z\right\}$$
$$- \left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{1}{\varphi}\left(x^{n-2}D_y + \frac{2}{c}x^{n-6}y^{n-5}z^{n-4}(s-X_1)\right) \quad \in \mathfrak{J}[s].$$

対称的に $xz^2(s-X_1-\frac{c}{2})(s-X_2)+\cdots \in \mathfrak{J}[s]$.

さきほどの $yz(s-X_1)(s-Y_1+c)+\cdots$ の $z$ 倍とで差しひき，

$yz^2(s-X_1)(zD_z-3c)+\cdots \in \mathfrak{J}[s]$. まあこれはいい

として，基本予想との gap は結局次のようになる．

$$\nexists\ z^2(s-X_1)(s-X_2) - \frac{c^2}{2^3}(xy)^{n-8}\left(\boxed{351}\,\boxed{531}+\boxed{531}\,\boxed{351}\right)+\cdots$$

but

$$\mathfrak{J}[s]\ni\begin{cases} z^3(s-X_1)(s-X_2) - \frac{c^2}{2^3}(xy)^{n-8}z(\qquad〃\qquad)+\cdots \\ yz^2(s-X_1)(s-X_2-\frac{c}{2}) - \frac{c^2}{2^3}x^{n-8}y^{n-7}(\qquad〃\qquad)+\cdots \\ xz^2(s-X_1-\frac{c}{2})(s-X_2) - \frac{c^2}{2^3}x^{n-7}y^{n-8}(\qquad〃\qquad)+\cdots \\ (D_zz^2+z)(s-X_1)(s-X_2) - \frac{c^2}{2^3}(xy)^{n-8}D_z(\qquad〃\qquad)+\cdots \end{cases}$$

即ち，$x, y, z, D_z$ を乗ずれば，うまくとれる．

## 3. まとめ.

一階. $xy^3(s-X_3)+\cdots$ , $x^3y(s-X_3)+\cdots$

$$(x^{n-2}-y^2z^2)(s-X_1)-\frac{c}{2}x^{n-2}(xD_x)=(x^{n-2}-y^2z^2)(s-X_0)-\frac{c}{2}y^2z^2(xD_x)$$

二階 $yz(s-X_1)(s-Y_1+c)+\cdots$

$z^3(s-X_1)(s-X_2)+\cdots$ , $yz^2(s-X_1)(s-X_2-\frac{c}{2})+\cdots$

$xz^2(s-X_1-\frac{c}{2})(s-X_2)+\cdots$ , $(D_z z^2+z)(s-X_1)(s-X_2)+\cdots\cdots$

( $z^2s^2+\cdots$ はとれず, それから $D_x^{l}z^2s^2+\cdots$ , $D_x^{l_1}D_y^{l_2}z^2s^2+\cdots$ もとれない )

三階 $(s-X_1)(s-X_2)(s-X_3)+\cdots$

ここに
$$\begin{cases} X_0=\frac{1}{n}(xD_x+yD_y+zD_z) & c=-\frac{n-6}{n} \\ X_1=X_0-\frac{c}{2}xD_x=\frac{n-4}{2n}xD_x+\frac{1}{n}yD_y+\frac{1}{n}zD_z & \text{etc.} \\ Y_1=X_0-\frac{c}{2}(yD_y+zD_z)=\frac{1}{n}xD_x+\frac{n-4}{2n}yD_y+\frac{n-4}{2n}zD_z & \text{etc.} \end{cases}$$

## 4. b函数.

二階におけるゴタゴタもあり, より慎重な検討を行うべきであるが,

・ $\boxed{0\ 0\ 0}\longrightarrow(s+\frac{1}{2})^3$ , $\boxed{1\ 1\ 1}\longrightarrow(s+1)^2$ .

などは確実.

monodromy の固有多項式 $n$:odd と $n$:even でちがうとおもわれる.(表示法が)

$n$:even $\Rightarrow$ $\dfrac{(t^n-1)^{3(n+1)}}{t-1}$ であろう.

一般に, $a(x) \in f^{\nu} : f^{\nu-1}\mathfrak{a} + f^{\nu-2}\mathfrak{a}^2 + \cdots + \mathfrak{a}^{\nu-1}$

i.e. $^{\exists} p_\nu(s, x, \xi) = a(x)s^{\nu} + \cdots$ , $p_\nu(f, x, df) = 0$

しかし, $p_\nu$ を principal symbol とする $\mathcal{J}[s]$ の元がない, というとき,

"~~[illegible]~~ $a(x)$ に対し, $\nu$ 階の $S_\theta$ の反例を与えうる」と呼ぶ.

$_N T_{n;m}$ $\quad \frac{1}{n}(x_1^n + \cdots + x_N^n) - \frac{1}{m}(x_1 \cdots x_N)^m$ .

$n > Nm$ (type D) $\quad N \ge 3,\ m \ge 2$ と仮定

$\ell(f) = L(f) = N$ ~~[illegible]~~

$\boxed{n \ge (2N-1)m-2}$ のとき, $x_1^{2m-2}(x_2 \cdots x_{N-2})^{Nm-2}$ に対し, 2階の $S_\theta$ の反例を与えうる.

$\boxed{n \ge \frac{1}{2}(N-1)\{(N+2)m-2\}}$ のとき, $x_1^{(N-1)(m-1)}$ に対し, $N-1$ 階の $S_\theta$ の反例を与えうる.

$2 < \nu < N-1$ なる $\nu$ についても, $n$ の大きさに応じて, 色々な $\nu$ 階の反例があたえうる.

又, $\boxed{n \ge (N+2)m-2}$ では $x_1^{2m-2}(x_2 \cdots x_{N-2})^{(N+2)m-2}$ に対しても 2階の反例を与えうる. etc ...

くわしいことが色々とわかっている.

$N = 3$ に対し, よりくわしくのべてみよう.

$_3 T_{n;m}$ $\quad \frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{m}(xyz)^m$ $\quad \boxed{n \ge 5m-2}$

(i) $\mathfrak{a} \ni x^{m-1}y^{2m-1}z^{3m-1},\ x^{2m-1}y^{n+m-1},\ x^{n+2m-1}y^{m-1},\ x^{2n+m-1}, \ldots$

$\mathfrak{a} : f = (x^{m-1}y^{2m-1}, \ldots, x^{n-m} - (yz)^m, \ldots)$ $\quad$ ← ここ 2つに($n \ge 3m+1$)

$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a} = 3n^2(m-1) + 3n - 1$

$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a} : f = 3n(m-1)^2 - (m-1)(m^2 - 8m + 1) + 1$ .

$n \geq 5m-2 \Rightarrow \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}f : f^2/\mathfrak{a} : f = (x^{2m-2}, (xy)^{m-1}, \cdots)$

(ii) $X_0 = \frac{1}{n}(xD_x + yD_y + zD_z)$ $\qquad c = \frac{3m}{n} - 1$.

$X_1 = X_0 - \frac{c}{m}xD_x = (\frac{1}{m} - \frac{2}{n})xD_x + \frac{1}{n}(yD_y + zD_z)$ etc.

$(i, j, k)$ を $1, 2, 3$ の permutation として,

$\boxed{ijk}$ とは, $\boxed{ijk}f = x^{im-1}y^{jm-1}z^{km-1}$ となる vector field.

$$\boxed{123} = \frac{-1}{\varphi}(y^{m-1}z^{2m-1}D_x + x^{n-m-1}z^{m-1}D_y + x^{n-2m-1}y^{n-m-1}D_z)$$

$$\varphi = 1 - (xyz)^{n-3m}$$

(iii) 一階

$$x^{m-1}y^{2m-1}(s - X_3) - \frac{c}{m}(x^m y^{2m-1}D_x + z\boxed{231})$$

$$(x^{n-m} - (yz)^m)(s - X_1) - \frac{c}{m}x^{n-m}(xD_x) \qquad \text{etc.}$$

(iv) 三階

$$(s-X_1)(s-X_2)(s-X_3) - (xyz)^{n-3m}(s-X_0+2c)(s-X_0+c)(s-X_0)$$

$n \geq 5m-1$ では, $(s-X_1)(s-X_2)(s-X_3) +$ ($s$ を含まない三階作用素) とできている.

(v) 二階

$$Q = \boxed{123}\boxed{132} + \frac{1}{\varphi}x^{n-3m-1}y^{2m-1}z^{m-1}\{(3m-1)\boxed{312} + (2m-1)y^{n-3m}\boxed{231}\}$$

$$P_2(s) = x^{2m-2}(s-X_2)(s-X_3) - \left(\frac{c}{m}\right)^2(yz)^{n-5m+2}Q \quad \text{とおくと}$$

$$P_2(s)f^s = \left(\frac{c}{m}\right)^2\frac{m-1}{\varphi}x^{m-2}(yz)^{n-m}sf^{s-1}.$$

$\mathfrak{a} + (f) = (x^{n-1} - x^{m-1}(yz)^m, \cdots, \cdots, (xyz)^n)$ より, $S_g$ の反例.

これを修正するには, $x$, $y^{m-1}$, $z^{m-1}$, $D_x^{m-1}$ をかければ OK. 具体的には,

$$y^{m-1}\left\{x^{2m-2}\left(s - X_2 - \frac{(m-1)c}{m\varphi}\right)(s-X_3) - \left(\frac{c}{m}\right)^2(yz)^{n-5m+2}Q\right\} - \left(\frac{c}{m}\right)^2\frac{m-1}{\varphi}x^{m-2}z^{n-m}D_y$$

$a^{(b)} = a(a-1)\cdots(a-b+1)$ として,

$$S_{m-2} = \sum_{j=1}^{m-1} (m-1)^{(j)} D_x^{m-1-j}\frac{1}{\varphi} x^{m-1-j} \qquad (\text{e.g. } S_0 = \frac{m-1}{\varphi})$$

という, $m-2$ 階 の作用素を定義し,

$$\Psi = S_{m-2}\cdot x^{m-1}$$

$$R(\rho) = S_{m-2}\cdot(xyz)^{n-4m}\left\{(\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) + \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{n-3m}{\varphi} y^{n-2m+1} z^{n-3m+1}\boxed{123}\right\}$$

とおく, $R(\rho)$ のかわりに, $n \geq 5m-1$ では

$$R = \left(\frac{c}{m}\right)^2 S_{m-2}\cdot x^{n-4m}(yz)^{n-5m+1}\Big[\frac{n-3m}{\varphi} y^{n-m} z^{n-2m}\boxed{123} + \Big\{xyz\boxed{123}\boxed{321} + \frac{x^{2m}}{\varphi}\Big((3m-1)y^m\boxed{123} + x^{n-4m}\big((2m-1)(xz)^m + (m-1)y^{n-m}\big)\boxed{321}\Big)\Big\}\Big]$$

とおくと,

$$\left\{(D_x^{m-1}x^{2m-2} + \Psi)(\rho - X_2)(\rho - X_3) - D_x^{m-1}\left(\frac{c}{m}\right)^2(yz)^{n-5m+2}Q\right\} - R(\rho)$$

or $\{ \quad 〃 \quad \} - R$.

$D_y$, $D_z$ をかけて修正するのは不可能 //.

$$(xy)^{m-1}(\rho - X_3)(\rho - Y_3 + c) + \left(\frac{c}{m}\right)^2 z^{n-m} D_x D_y + \left(\frac{c}{m}\right)^2 T$$

$$Y_3 = X_0 - \frac{c}{m}(xD_x + yD_y)$$

$$T = (xy)^{n-4m+1} z^{n-5m+2}\boxed{123}\boxed{321} + \frac{1}{\varphi}\Big\{(xy)^{n-4m} z^{n-4m+1}\big((3m-1)(yz)^m + (3m-2)x^{n-m}\big)\boxed{321} + (m-1)x^{2n-3m-1}y^{n-3m}z^{n-4m}D_y\Big\}$$

というように, $(xy)^{m-1}$ に対してはとれる.

さて次に, $\underline{{}_N T_{n;2}}$ についてみてみよう.

${}_N T_{n;2}$ $\quad \frac{1}{n}(x_1^n + \cdots + x_N^n) - \frac{1}{2}(x_1\cdots x_N)^2 \qquad (N \geq 4)$

$$\varphi = 1 - (x_1\cdots x_N)^{n-2N}$$

$$\boxed{1\,3\,5\cdots 2N-1} = \frac{-1}{\varphi}\left\{ x_2 x_3^3 \cdots x_N^{2N-3} D_1 + \sum_{j=2}^{N} (x_1^{n-2j+1} \cdots x_{j-1}^{n-3})(x_{j+1} x_{j+2}^3 \cdots x_N^{2(N-j)-1}) D_j \right\}$$

$$S = \sum_{j=2}^{N} (2(N-j)+3)(x_2^{n-3} \cdots x_{j-1}^{n-2j+3})(x_j x_{j+1}^3 \cdots x_N^{2(N-j)+1}) \boxed{\underbrace{\overset{j-1}{2(N-j)+3 \cdots 2N-1}}_{\text{増加.}}\ \underbrace{2(N-j)+1 \cdots 3\ 1}_{\text{減少}}}$$

$$Q = \boxed{1\,3\,5 \cdots 2N-1}\,\boxed{1\,2N-1 \cdots 5\,3} + \frac{1}{\varphi} x^{n-2N-1} S \qquad \text{とおく.}$$

$n \geq 2N+2$ $\quad P_2(\rho) = x_1^2 (x_2 \cdots x_{N-2})^{2N+2} (\rho - x_{N-1})(\rho - x_N) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 (x_{N-1} x_N)^{n-2(N+1)} Q$

とおくと, $\quad P_2(\rho) f^\rho = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} (x_2 \cdots x_{N-2})^{2N} (x_{N-1} x_N)^{n-2} \rho f^{\rho-1}$

例によって, これは, 2階の反例となる. $P\otimes$ へ修正することを考えると, $x_1, x_2^{n-2N-1}, \cdots, x_{N-2}^{n-2N-1}, x_{N-1}, x_N$, それに $D_1$ をかけるとよい.

$n \geq 4N-4$ では, $x_1^2 (x_2 \cdots x_{N-2})^{2N-2}$ ですでに 2階の反例がつくれる

特に $\quad 4T_{n;2} \quad \frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n + w^n) - \frac{1}{2}(xyzw)^2 \quad n \geq 9.$

$n \geq 10$ で, $x^2 y^{10}$ に対し 2階の反例を構成しよう.
$n \geq 12$ では, $x^2 y^6$ ですでに 〃 .
$n \geq 15$ で, $x^3$ に対し 3階の反例を構成しよう. etc.

## §5. simplex type function に対する $b(s)$ の例.

2変数のものをみなおしてみれば，§2 はすべて simplex type である。§3 では type $S$ のみが simplex type の即ち，simplex type であったが故に，type $S$ の計算は容易であった。しかし link のときは，一般に simplex type でないにせよ，exact duplex type とでもいうべきもので，それ故なんとかできた。

$(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$ は，simplex type でない しかも，下へつき出しているいやらしい典型である. それ故になつかしい.

本章においても，§3，§4 に simplex type の典型例をあげたが，§4 のような一見簡単なものでも，非常に複雑なことのおこることは示した通りである。

$T_{(p,q,r);(1,1,1)}$ は 第四章 §2 の $T_{p,q,r}$ にある. これはかりとおとなしいものである。

1. $\frac{1}{4}(x^4+y^4+z^4)-xyz$.　計算の始まった初期に，double の出ることがわかった歴史的な例. 矢野の計算法を大島利雄氏が採用し，結着がついた

　$T_{(4):(1)}$

2. $\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}$　T型とことなる simplex type.

3. $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-x^2yz^2$　$y^3$ に対する face が positivity をみたさない. しかしまにあっているという例.

4. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{9}y^9+\frac{1}{5}z^5-xy^5z^3$

　type $\nabla$

1. $\frac{1}{4}(x^4+y^4+z^4) - xyz$

$\mu = 11.$ $\Omega \supseteq m^5$ $\Omega : f = m$. $c = -\frac{1}{4}$. $\varphi = 1 - xyz$.

$X_1 = \frac{1}{4}(2xD_x + yD_y + zD_z)$, $X_2 = \frac{1}{4}(xD_x + 2yD_y + zD_z)$, $X_3 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y + 2zD_z)$

$X_0 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y + zD_z)$

一階.
$$x(s - X_3) - \frac{z^2}{4\varphi}(y^2 D_x + zD_y + x^2 y D_z)$$
$$y(s - X_1) - \frac{x^2}{4\varphi}(y^2 z D_x + z^2 D_y + xD_z)$$
$$z(s - X_2) - \frac{y^2}{4\varphi}(yD_x + xz^2 D_y + x^2 D_z)$$

二階. 一般論から, $\left(s - \frac{1}{4}\langle x, D\rangle + \frac{1}{4}\right)\left(s - \frac{1}{3}\langle x, D\rangle\right) + \cdots$

しかし, 次のような一見ややこしいのもとれる.

$s^2 - sA - B$ として,

この形では, 主部は分解されない.

$$\begin{cases} A = -\frac{5}{4} + \frac{3xyz}{4\varphi^2} \\ B = \left(\frac{5}{3} - \frac{(1+5xyz)xyz}{12\varphi^2}\right)X_0 - \frac{1}{16\varphi^2}\sum a_{ij} D_i D_j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} = (xyz - 2)y^2z^2, \cdots \\ a_{23} = \frac{1}{3}\{(2x^3yz + y^2z^2 - 5x^2)x - 4xyz\}, \cdots \end{pmatrix}$$

$$s^2 - As - B = s^2 - \left(X_0 - \frac{5}{4}\right)s - \frac{5}{3}X_0 - \frac{1}{12}\{(yD_y)(zD_z) + (zD_z)(xD_x) + (xD_x)(yD_y)\} + \cdots$$

$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{000} \\ 2\boxed{000} \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{100} \\ \boxed{100} \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{100} \\ -\frac{5}{4}\boxed{100} \end{pmatrix}, \cdots, e_6 = \begin{pmatrix} \boxed{200} \\ -\frac{3}{2}\boxed{200} \end{pmatrix}, \cdots,$

$e_9 = \begin{pmatrix} \boxed{300} - 6\boxed{011} \\ -\frac{7}{4}(\boxed{300} - 6\boxed{011}) \end{pmatrix}, \cdots$ として, $s$ の表現は $\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & 0 & \\ & & -\frac{5}{4} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$

$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)^2\left(s+\frac{5}{4}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{7}{4}\right)$

これは, 三次元で $b(s)$ に double のでる, きれいな形ではもっとも簡単なものである.

2. $$f = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}$$

simplex type.

$$X_0 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z) \qquad X_3 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y) + \frac{1}{2}zD_z$$

$$X_1 = \frac{1}{6}xD_x + \frac{1}{3}yD_y + \frac{1}{3}zD_z \qquad X_2 = \frac{1}{3}xD_x + \frac{1}{6}yD_y + \frac{1}{3}zD_z.$$

$$Y' = -\frac{1}{2}xD_x + \frac{1}{2}yD_y + zD_z. \qquad Y'' = \frac{1}{2}xD_x - \frac{1}{2}yD_y + zD_z.$$

$$Y''' = xD_x + yD_y.$$

一階.
$$x(s - X_3) - \frac{z}{6(1-z)}(xY' + zD_x)$$
$$y(s - X_3) - \frac{z}{6(1-z)}(yY'' + zD_y)$$
$$z(s - X_0) - \frac{1}{12(1-z)}\{(x^2Y' + y^2Y'') + z^2Y'''\}$$

二階
$$(s - X_0)(s - X_3) - \frac{z}{1-z}\left\{\left(\frac{1}{12}xD_x + \frac{1}{12}yD_y + \frac{1}{6}zD_z\right)s - B\right\}$$

$$B = \frac{1}{36}((xD_x)^2 + (yD_y)^2) + \frac{1}{18}(zD_z)^2 + \frac{1}{36}xyD_xD_y + \frac{1}{12}(yzD_yD_z + zxD_zD_x).$$

第二項での $zs$ は，一階ずつかって微分作用素にかかる

$\boxed{000}$ から double factor $(s+1)^2$ が生じる.

$(s+1)\cdot$

$$b(s) = (s+1)^2\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)(s+2)\left(s+\frac{5}{4}\right)\left(s+\frac{7}{4}\right)$$

固有多項式では，さらに $\left(s+\frac{5}{4}\right)\left(s+\frac{7}{4}\right)$ が欠ける.

3. $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - x^2yz^2$

type ▽ である associated operators をみると、

$$
\left.
\begin{aligned}
X_0 &= \tfrac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z) \\
X_1 &= \tfrac{1}{3}(yD_y + zD_z) \\
X_2 &= \tfrac{1}{3}(xD_x - yD_y + zD_z) \\
X_3 &= \tfrac{1}{3}(xD_x + yD_y)
\end{aligned}
\right\}
$$

となんともいけないが、$X_2$において、係数負のものが出てきている。これは2次元ではおこりえない事情である。

しかしこの例の場合、$X_0$の支配下のはずだから心配することはないはずである。（実際、不用な associated operators に negative coeff の出るものなど、いくらでもある）

実はこの polynomial は quasi-hom である。!

$$f = X_0 f + \frac{2yz^2}{3(1-4xy^2z)}(f_x + 2xyf_z)$$

つまり、positivity 不成立というのは、なにか無理なかっこうをしているため、しばしば quasi-hom になる、というわけである。してみると、positivity は実はかなりむつかしいことなのかもしれない。

4. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{9}y^9 + \frac{1}{5}z^5 - xy^5z^3$ type $\nabla$.

$c = \frac{73}{180} > 0$. $\mu = 96$. $\mathfrak{a} : f = (x^2, y^3, z)$

$X_0 = \frac{1}{4}xD_x + \frac{1}{9}yD_y + \frac{1}{5}zD_z$. $\varphi = 1 - 15x^2yz$

$Q = \frac{1}{\varphi}(zD_y + 5xy^4D_z)$ $Q' = \frac{1}{\varphi}(3xz^2D_y + y^3D_z)$

一階. $x^2(s - X_0) - cy^2z^3\{y^3D_x + z^2Q\}$

$y^3(s - X_0) - cxz^2Q$

$z(s - X_0) - cxy^2Q'$

二階 $(s - X_0 + c)(s - X_0) - \frac{x^3y^3}{\varphi}c^2(3yD_y + 5zD_z - 9)Q'$

$+ \frac{x^2y^2z^2}{\varphi}c^2D_yD_z$.

$\boxed{000} \longrightarrow \frac{101}{180}$ & $\frac{29}{30}$. $\boxed{010} \longrightarrow \frac{121}{180}$ & $\frac{97}{90}$ etc.

$b(s) = (s+1) \cdot \left(s + \frac{101}{180}\right)\left(s + \frac{121}{180}\right) \cdots\cdots$

$\left(s + \frac{*}{90}\right) \cdots\cdots$

## §6. non-simplex type function の $b(s)$ に関して.

non-simplex type の代表的なものは, 第二章§3の S型以外の link である。しかし, この場合は, duplex といっても, 合同な simplex をかさねたような形であり, 又積表示の特殊性もあって, そこで示したように, 作用素を決定しうる。§5. の佐藤による ch. index 2 の実例は, やはり non-simplex であり, (simplex type の def をよくみよ. カッコウが simplex というのではない) そのため大変な計算になる. そして, A'Campo の例は  という感じに下へ張り出してきていて, まことに, ややこしいであろうと推測される。

symplex type においては, 結果からみれば

"$f(x)$ の lower Newton polyhedron の faces に associate した operators でことがすむ"

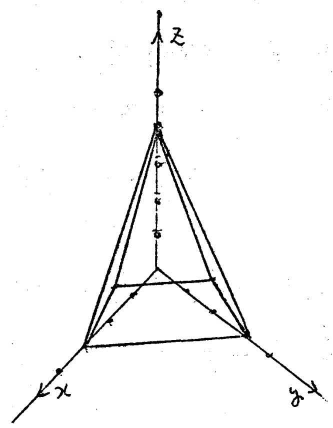
というわけだが, 上の2例とも, そうではないということは, そこでのべた通りである。つまり, 一般には, Newton polyhedron 程度の雑なものでは何もわからない。simplex type でさえ, complemental operators などが何故表われるかは, まだ満足な説明がない.

ここでは, non-simplex type であるが, 対称性をもつため比較的うまくいった例をしるしておく.

$$x^3+y^3+(x^2+y^2)z+z^4$$

Arnold の $P_9$ に $x^3$ を加えたものである.

$$\frac{1}{3}(x^3+y^3)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)z+\frac{1}{4}\beta z^4$$




$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^5$ ($z^4$ 以外の4次 monomial は $\mathfrak{a}$ に入る)

$\mu = 9.$ $1.\ x.\ y.\ z.\ x^2\ xy\ y^2\ z^2.\ xyz$ or $x^2y$ etc.

$$\begin{cases} X_0 = \frac{1}{3}(xD_x+yD_y)+\frac{1}{4}zD_z \\ X_2 = \frac{3}{8}(xD_x+yD_y)+\frac{1}{4}zD_z \\ X_3 = \frac{1}{3}(xD_x+yD_y+zD_z) \end{cases}$$

さすが複雑になるが，2階ですむ

一階． $\varphi = 1+\beta z \quad \varphi_2 = 1+2\beta z \qquad \begin{cases} Y_1 = -\frac{1}{2}(D_x+D_y)+D_z \\ Y_2 = yD_x+xD_y \end{cases}$

$$\boxed{112} = \frac{1}{\varphi}\left(xyY_1+\frac{1}{2}zY_2\right)$$

$$\boxed{302} = \frac{2}{\varphi_2}\left\{x^3Y_1+\frac{1}{2}(x^2+xy-yz)zD_x+\frac{1}{2}z\boxed{112}\right\}$$

$$x(s-X_3)+\frac{\beta}{12}\left\{z^2(z-x)D_x+\boxed{302}\right\}$$

$$y(s-X_3)+\frac{\beta}{12}\left\{z^2(z-y)D_y+\boxed{032}\right\}$$

$$z(s-X_2)+\frac{1}{12\varphi_2}Q$$

$$Q = \beta z^2(xD_x+yD_y)-\beta z^3(D_x+D_y)+(x+y)D_z+\frac{1}{\varphi}\left(xyY_1-\frac{1}{2}\beta z^2(yD_x+xD_y)\right)$$

二階．

$$(s-X_2)(s-X_3) = \frac{\beta}{2\cdot 12^2}(x^3+y^3)z^4 \quad s(s-1)f^{s-2}.$$

$(x^3+y^3)z^4 = (x^2+y^2)z\cdot(x+y)z^3 - xyz^2\cdot(x+y)z^2$ をみて，

$R(s) = 24\left(\frac{Q}{\varphi_2}-z^2Y_1\right)(s-X_0)+\boxed{112}\left(12(s-X_3)+Y_1\right)$ とおく．

$P(s) = (s-X_2)(s-X_3)-\frac{\beta}{12^2}R$ とおけ，

$\cancel{(s-X_2)}$ $P(s)f^s = \Phi\ f^{s-1}.$

$s$ に関して，非常にややこしい修正項（以下書くとすれば，四行程いりそう）がもとまり，それを $S(s)$ とすると，（もちろん $S(s)$ 一階）

$$P(s) - S(s) \in \mathfrak{J}[S].$$

ともかく，この場合は，ややこしいにせよ修正項がとれるのであるから，$_3T_{5:2}$ よりましといえよう。

尚，$\beta z^4$，と parameter $\beta$ を入れておいたのは，$\beta = 0$ のとき，$x = y = 0$ に singularity をもって，non-isolated になるので，（ただし homogeneous degree 3）それとの関係に興味があったからである。

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)^2\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{5}{4}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{7}{4}\right)$$

（固有多項式には $(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$ がいる）

結局苦労はしたものの，$\tilde{b}(s)$ は $P_q$ と同じ。

尚 A'Campo は [3] で，これの monodromy を計算して，

$$\frac{1}{(t-1)}(t^3-1)^2(t^4-1)$$ を得ている。

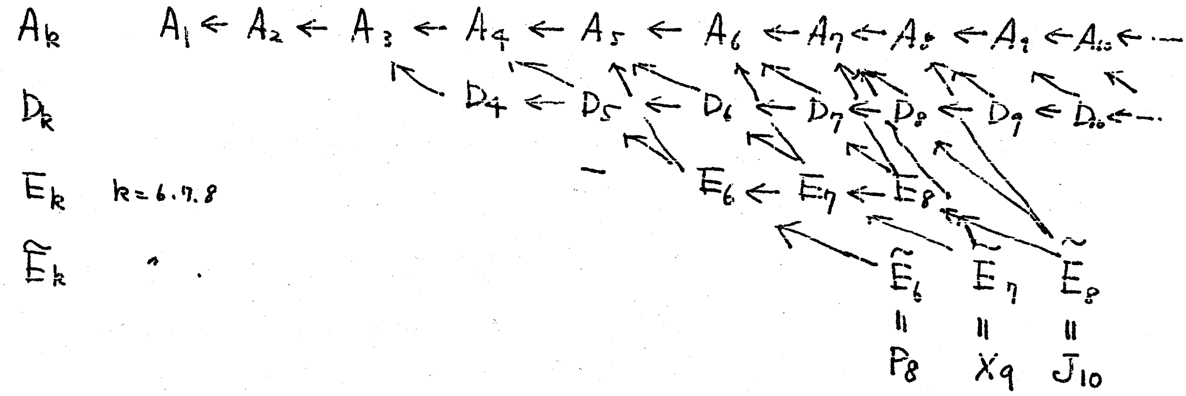
# 第四章 Elementary Singularity の $b(s)$

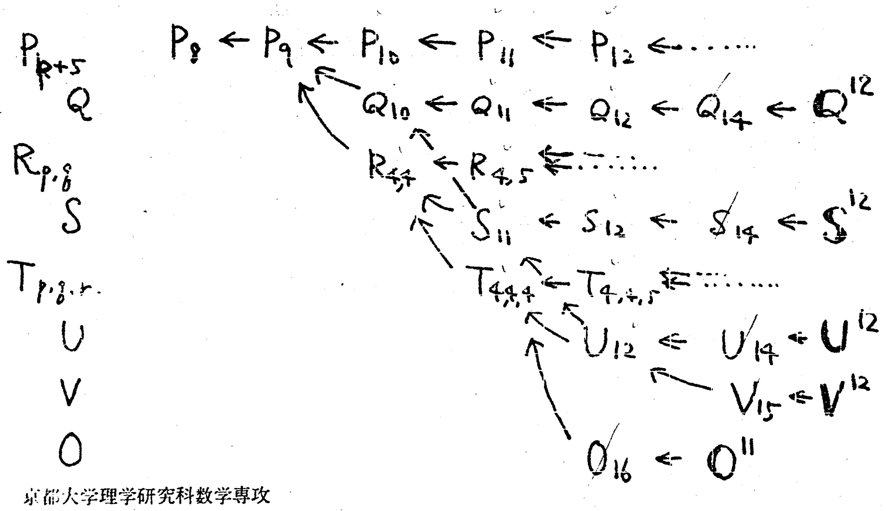
## §1. Singularity の分類理論

Thom. Mather. Arnold 等によって, degenerate critical points における函数の標準形を決定する問題はある程度決着がついたといってよい.

"simple" な germ A, D, E と, non-simple なもののうちで dense になる "boundary case" $\tilde{E}$. さらにこの boundary case を細かくみた P. X. J 等の系列が決定されている. それらの germ の関係は下記の diagram で示される. ここで, 矢印の始点の germ の近傍に矢印の終点の germ がある, i.e. deformation でうつれることを示している.

詳細は Arnold　Saito　Duistermaat 等をみよ.



$$
\begin{array}{ll}
X_{p+5} & X_9 \leftarrow X_{10} \leftarrow X_{11} \leftarrow X_{12} \leftarrow \cdots\cdots \\
Y_{p,q} & \qquad\quad Y_{5,5} \leftarrow Y_{5,6} \leftarrow \cdots\cdots \\
Z & \qquad\quad Z_{11} \leftarrow Z_{12} \leftarrow Z_{13} \leftarrow Z_{15} \leftarrow Z^{13} \\
W & \qquad\qquad W_{12} \leftarrow W_{13} \leftarrow W_{15} \leftarrow W^{13} \\
N & \qquad\qquad\qquad\qquad N_{16} \leftarrow N^{13}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
J_{p+4} & J_{10} \leftarrow J_{11} \leftarrow J_{12} \leftarrow J_{13} \leftarrow \\
K. & \qquad\quad K_{12} \leftarrow K_{13} \leftarrow K_{14} \leftarrow K_{15} \leftarrow K^{14}
\end{array}
$$

これらの germ の標準形は次の通り．(この他に non-deg. quadratic form を加えると思っていただきたい). 簡単のため $\mathbb{C}$ 上の分類

| | | | |
|---|---|---|---|
| simple germs. | $A_k$ : | $x^{k+1}$ | $k \geq 1$ |
| | $D_k$ : | $x^2y + y^{k-1}$ | $k \geq 4$ |
| | $E_6$ : | $x^3 + y^4$ | |
| | $E_7$ : | $x^3 + xy^3$ | |
| | $E_8$ : | $x^3 + y^5$ | |
| boundary case. | $\tilde{E}_6$ : | $x^3 + y^2z + g_1xz^2 + g_2z^3$ | |
| | $\tilde{E}_7$ : | $x^3y + g_1xy^3 + g_2y^4$ | |
| | $\tilde{E}_8$ : | $x^3 + g_1xy^4 + g_2y^6$ | |

いずれも $g_1^3/(4g_1^3+27g_2^2)$ が diffeomorphism invariant.
boundary case の他の標準形は次にもかくが，これらはすべて weighted homogeneous polynomial である．
尚 Siersma の表との対応を示しておこう．

| Siersma. | (2) | (3) | (4) | $(5)_4$ | $(5)_5$ | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_{k-1}$ | $D_4$ | $D_{l+1}$ | $E_6$ | $E_8$ | $E_7$ | $\tilde{E}_7$ | $\tilde{E}_6$ | ? | $P_9$ (続出) |

(9) $\quad xz^2 - y^3 \pm x^4$ は不明．

尚ここで、これらの分類理論にしばしば表われるいくつかの量を定義しておこう。標準形に non-deg. quad. form をつけて、$n$次元の germ とおもう。$f$ に対し $\mathfrak{a}=(f_1,\dots,f_n)$ ・ $f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

$$\operatorname{codim} f \equiv \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/\mathfrak{a} - 1 = \mu - 1.$$

- $\rho(f) \equiv \min\{r;\ \mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^{r+1}\}$ ($\leq \operatorname{codim} f$, $\operatorname{codim} f \leq \binom{\rho+n}{n}-1$)
- $\sigma(f) \equiv \min\{s;\ f$ is right determined by $s$-jet$\}$

　$f$ が weighted homogeneous $(r; r_1,\dots,r_n)$ のときにはさらに

- $r(f) \equiv \sum \frac{r_i}{r} = \operatorname{Trace} X.$　　$X = \sum \frac{r_i}{r} x_i D_i.$
- $s(f) \equiv \max\{\alpha :\ \alpha$ は $D$ $G$ $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ の固有値$\}$
　$\equiv \max\{\sum \frac{r_i}{r}\nu_i ;\ x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n} \notin \mathfrak{a}\}$　　　$2r+s=n$
- $1/h = \frac{1-s}{2}$　(i.e. $r = \frac{n-1}{2}+\frac{1}{h}$, $s = 1-\frac{2}{h}$)　Coxeter #.

　又, $\frac{s}{2}\left(=\frac{n}{2}-r\right) = \frac{1}{2}-h^{-1}$) は Arnold の $\beta$ といわれ,

$$\int \exp\left(\frac{1}{\hbar} i f\right)\varphi(x)\,dx = O(\hbar^{\frac{n}{2}-\beta+\varepsilon})\ \forall\varepsilon \text{ となる.}$$
$$= O(\hbar^{r+\varepsilon})$$

| | $A_k$ | $D_k$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $\tilde{E}_6$ | $\tilde{E}_7$ | $\tilde{E}_8$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| codim | $k-1$ | $k-1$ | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | |
| $\rho$ | $k-1$ | $k-2$ | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | $6^{(*)}$ | $g_1=0$ では 5 |
| $\sigma$ | $k+1$ | $k-1$ | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 6 | |
| $s$ | $(k-1)/(k+1)$ | $2(k-2)/2(k-1)$ | $10/12$ | $16/18$ | $28/30$ | 1 | 1 | 1 | |
| $r$ | $1/(k+1)+\bullet$ | $\frac{1}{2(k-1)}+\bullet$ | $1/12+\bullet$ | $1/18+\bullet$ | $1/30+\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $\bullet = \frac{n-1}{2}$ |

それでは、残っている手引について。まず boundary case の

$\tilde{E}_6 = P_8$ :　$x^2z+y^3+\varepsilon y^2z+az^3$　　$a(4\varepsilon+27a)\neq 0$　$\varepsilon^3=\varepsilon$
　　or. $x^3+y^3+z^3+\mu xyz$　　$\mu^6/(\mu^3+27)$ が invariant.

$\tilde{E}_7 = X_9$ :　$x^4+\varepsilon x^2y^2+ay^4$　　$a(4a-\varepsilon^2)\neq 0$　$\varepsilon^3=\varepsilon$.
　　or. $x^4+y^4+z^2+\mu xyz$　　$(\mu^4+3\cdot 64)^3/(\mu^4-64)^2$ が invariant.

$\tilde{E}_8 = J_{10}$ :　$x^3+\varepsilon x^2y^2+ay^6$　　$a(4\varepsilon+27a)\neq 0$　$\varepsilon^3=\varepsilon$
　　or. $x^6+y^3+z^2+\mu xyz$.　$\mu^6/(\mu^6-27\cdot 16)$ が invariant.

$P_{p+5}$ : $x^2z + y^3 + y^2z + az^p$   $a \neq 0$   $p > 3$.

$R_{p,q}$ : $x^3 + 3xyz + y^p + az^q$   $4 \leq p \leq q$   $a \neq 0$.   $\mu = p+q+2$

$T_{p,q,r}$ : $axyz + x^p + y^q + z^r$   $4 \leq p \leq q \leq r$   $a \neq 0$   $\mu = p+q+r-1$.

$P_{p+5} \sim T_{3,3,p}$, $R_{p,q} \sim T_{3,p,q}$ である.   $(J_{p+4} \approx T_{2,3,p})$

$Q_{10}$ : $x^2z + y^3 + ayz^3 + z^4$   $a \in \mathbb{C}$.

$Q_{11}$ : 〃 $+ yz^3 + az^5$.   〃

$Q_{12}$ : 〃 $+ ayz^4 + z^5$   〃

$Q_{14}$ : 〃 $+ yz^4 + az^6 + bz^7$.   $27a^2 + 4 \neq 0$.

$S_{11}$ : $x^2z + yz^2 + y^4 + ay^3z$   $a \in \mathbb{C}$

$S_{12}$ : 〃 $+ xy^3 + ay^5$   〃

$S_{14}$ : 〃 $+ y^3z + ay^5 + by^6$   $a \neq 0, 1/4$.

$U_{12}$ : $x^3 + y^3 + z^4 + 3axyz^2$   $a \in \mathbb{C}$

$U_{14}$ : 〃 $+ 3xz^3 + 3ayz^3 + 9byz^4$   $a^3 \neq 1$.

$V_{15}$ : $x^2y + z^4 + x^2y^2 + ay^3z + by^4 + cy^4z$   $a(12b+1)\Delta(a,b) \neq 0$.

$O_{16}$ : $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + (ax+by+cz+du)^3 + exyzu$.   $\Delta(a,b,c,d) \neq 0$.

$X_{p+5}$ : $x^4 + x^2y^2 + ay^p$   $a \neq 0$. $p > 4$.

$Y_{p,q}$ : $x^2y^2 + x^p + y^q$   $5 \leq p \leq q$   $a \neq 0$   $\mu = p+q+1$.

$Z_{11}$ : $x^3y + 3axy^4 + y^5$   $a \in \mathbb{C}$

$Z_{12}$ : 〃 $+ 3xy^4 + ay^6$   〃

$Z_{13}$ : 〃 $+ 3axy^5 + y^6$   〃

$Z_{15}$ : 〃 $+ 3xy^5 + ay^7 + by^8$.   $a^2 + 4 \neq 0$.

$W_{12}$ : $x^4 + y^5 + 2ax^2y^3$   $a \in \mathbb{C}$

$W_{13}$ : 〃 $+ 4xy^4 + ay^6$   〃

$W_{15}$ : 〃 $+ 2x^2y^3 + ay^6 + by^7$   $a^2 \neq a$.

$N_{16}$ : $x^4y + ax^3y^2 + bx^2y^3 + xy^4 + cx^3y^3$   $\Delta(a,b) \neq 0$.

$J_{p+4}$ : $x^3 + \varepsilon x^2y^2 + ay^p$   $a \neq 0$. $\varepsilon^2 = 1$. $p > 6$.

$K_{12}$ : $x^3 + ay^5 + y^7$   $a \in \mathbb{C}$.

$K_{13}$ : 〃 $+ xy^5 + ay^8$

$K_{14}$ : 〃 $+ axy^6 + y^8$

$K_{16}$ : 〃 $+ xy^6 + ay^9 + by^{10}$   $27a^2 + 4 \neq 0$.   以上//.

## §2. Singularity の分類における，標準形に対しての b(s) の計算.

1.

以下に示すのは，Arnold の分類（p.　参照）による、基本的な singularity に対しての，b(s) の計算である．
標準形　$f+Q(x')$（ここで Q は quadratic form）に対して，f の b(s) を計算する．$x_{l+1}^2+\cdots+x_n^2$ を加えた場合は，$(s+\alpha)\longmapsto(s+\alpha+\frac{n-l}{2})$ とすればよい．

simple germs と boundary cases は weighted homogeneous.
1-parameter family たちはすべて non-quasi-hom.
2-parameter　$Q_{14}, S_{14}, U_{14}, Z_{15}, W_{15}, K_{16}$ は，sweep out すると第2のparameter は第1のparameter によって sweep out され，しかも sweeped f は weighted hom. 3-parameter の $V_{15}, N_{16}$ も同様．よって，これらは weight のみ示しておこう．$O_{16}$ は計算が極めて大変なため，$a=b=c=d=0$ としてのべる．

又，singularity の立場からは $P_{p+5}\sim T_{3,3,p}$．$R_{p,q}\sim T_{3,p,q}$．$X_{p+5}\sim T_{2,4,p}$，$Y_{p,q}\sim T_{2,p,q}$，$J_{p+4}\sim T_{2,3,p}$．であるから，無限系列に対しては $T_{p,q,r}$ のみでこと足りるわけだが，我々としては，次元のちがいもあり，式の表示により作用素がどのようになるかも興味あるのですべてそのままの形での計算をしるす．

X. Y. Z. W. K は二変数であって，私の分類（の何型かを示しておこう．

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{p+5}$ | $Y_{p,q}$ | $Z_{11}$ | $Z_{12}$ | $Z_{13}$ | $W_{12}$ | $W_{13}$ | $K_{12}$ | $K_{13}$ | $K_{14}$ |
| $S_{I}$ | $S_{I}$ | $K_{II}^{\#}$ | $K_{II}^{b}$ | $K_{II}^{\#}$ | $Y_{I}$ | $K_{I}^{b}$ | $K_{I}^{\#}$ | $K_{I}^{b}$ | $K_{I}^{\#}$ |

b 函数一覧は 4.(p.　) にある．

2. weighted hom と考えられるもの.

$A_k$: $x^{k+1}$ $(k+1;\ 1)$

$D_k$: $x^2y+y^{k-1}$ $(2(k-1);\ k-2,\ 2)$

$E_6$: $x^3+y^4$ $(12;\ 4,\ 3)$

$E_7$: $x^3+xy^3$ $(9;\ 3,\ 2)$

$E_8$: $x^3+y^5$ $(15;\ 5,\ 3)$

$P_8=\widetilde{E}_6$: $x^3+y^2z+g_1xz^2+g_2z^3$ $(3;\ 1,\ 1,\ 1)$ (elliptic curve)

$X_9=\widetilde{E}_7$: $x^3y+g_1xy^3+g_2y^4$ $(4;\ 1,\ 1)$ (cross ratio)

$J_{10}=\widetilde{E}_8$: $x^3+g_1xy^4+g_2y^6$ $(6;\ 2,\ 1)$ (3-tangent parabolas)

sweep out で w-h になるもの.

$Q_{14}$: $x^2z+y^3+yz^4+az^6+\cancel{b}z^7$ $(5/12,\ 1/3,\ 1/6)$

$S_{14}$: $x^2z+yz^2+y^3z+ay^5+\cancel{b}y^6$ $(3/10,\ 1/5,\ 2/5)$

$U_{14}$: $x^3+y^3+3xz^3+3ayz^3+9\cancel{b}yz^4$ $(1/3,\ 1/3,\ 2/9)$

$V_{15}$: $x^2y+z^4+\cancel{y^2z^2}+ay^3z+by^4+\cancel{c}y^4z$ $(3/8,\ 1/4,\ 1/4)$

$Z_{15}$: $x^3y+3xy^5+ay^7+\cancel{b}y^8$ $(2/7,\ 1/7)$

$W_{15}$: $x^4+2x^2y^3+ay^6+\cancel{b}y^7$ $(1/4,\ 1/6)$

$N_{16}$: $x^4y+ax^3y^2+bx^2y^3+xy^4+\cancel{c}x^3y^3$ $(1/5,\ 1/5)$

$K_{16}$. $x^3+xy^6+ay^9+\cancel{b}y^{10}$ $(1/3,\ 1/9)$

(これらはもちろん w-h. ではなく, 作用素を計算してみる必要はある. しかし, sweepout しても残ったのが non-g-h であるものたちの方がより興味がある.)

3. 残りすべてについて.

ことごとく $\Omega:(f)=\mathfrak{m}$ となり, $\Delta^2+\cdots$ ですね. 以下に作用素をかりていこう. すべて simplex type である.

$(E_6)$ $\quad P_{p+5}$ : $\quad x^2z + y^3 + y^2z + az^p \qquad p \geq 4.$

$\mu = p+5$. $\quad 1,\ z, \cdots, \boxed{z^p};\ x,\ y,\ xy,\ yz.$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)xD_x + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)yD_y + \frac{1}{p}zD_z$$

$$X_3 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z)$$

$$Q = 4^{-1}\left(1+\frac{9}{4}apz^{p-3}\right)^{-1}\left\{(2z-3y)zD_y + 9y\left(-\frac{1}{2}xD_x + zD_z\right)\right\}$$

一階 $\quad x(s-X_3) + \dfrac{p-3}{6}az^{p-1}D_x$

$\qquad y(s-X_3) + \dfrac{p-3}{3}az^{p-3}Q$

$\qquad z(s-X_2) + \dfrac{p-3}{2p}y\left(-\dfrac{xD_x}{2} + zD_z\right) - \dfrac{p-3}{2}az^{p-3}Q$

二階 $\quad X_2' = X_2 - \dfrac{p-3}{2p}yD_z + \dfrac{p-3}{2}az^{p-4}Q$ とおいて，

$$(s-X_3)(s-X_2') + \frac{(p-3)^2}{12p}az^{p-4}(xD_x)Q.$$

$p \geq 5$ では $\quad (s-X_3)(s-X_2) - \dfrac{(p-3)^2}{6p}az^{p-5}[Q'Q - zQ''(s)]$

$$Q' = 2^{-1}\left(1+\frac{9}{4}apz^{p-3}\right)^{-1}\left\{\left(y+\frac{3}{2}apz^{p-2}\right)zD_y - 3y\left(\frac{-1}{2}xD_x + zD_z\right)\right\}$$

$$Q''(s) = 2^{-1}(\qquad \text{〃} \qquad)^{-1}\left\{Q - 9Q' - \frac{9pz}{2(p-3)}(s-X_3)\right\}$$

$p=4$ において（それは Siersma(10) であるが）$yD_z$ という項のないのをさがすと，いい形ばかりでとれるが，$X_2$ の weight ではかれば $yD_z$ は 0次より高い．しかし普通にかぞえて $yD_z$ で 0次とおもうと，主部の分解が奇妙なことになる．

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)^2\left(\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+1+\frac{1}{p}\right)\cdots\left(s+1+\frac{p-1}{p}\right)\right)_{red}.$$

$\boxed{0\ 0\ 0}$ $\quad \boxed{1\ 0\ 0}$ $\quad \boxed{1\ 1\ 0}$

$\qquad\qquad \boxed{0\ 1\ 0}$ $\quad \boxed{0\ 1\ 1}$

$Q_{10}$ : $x^2 z + y^3 + a y z^3 + z^4$.

$\mu = 10$. $x, xy$ と $y^i z^j$ $\begin{smallmatrix} i=0,1 \\ j=0,1,2,3 \end{smallmatrix}$ の8個.

$$X_0 = \frac{3}{8} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{4} z D_z, \quad \theta = -\frac{1}{2} x D_x + z D_z.$$

$$Q = \frac{1}{\varphi}\left\{ \left(-\frac{a}{4} z + \frac{3a^2}{4^2} y\right)\theta + z^2 D_y \right\} \qquad \varphi = 1 + \frac{3a^3}{4^2} z$$

$$Q' = \frac{1}{\varphi}\left\{ \left(y + \frac{a^2}{4} z^2\right)\theta + a z^3 D_y \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{\varphi}\left\{ \left(z - \frac{3a}{4} y\right)\theta + \frac{3a^2}{4} z^3 D_y \right\}$$

一階.
$$x(s - X_0) + \frac{1}{12} y z^2 D_x$$
$$y(s - X_0) + \frac{1}{36} Q$$
$$z(s - X_0) + \frac{1}{48} Q'$$

二階.
$$\left(s - X_0 + \frac{1}{12}\right)(s - X_0) + 10^8 a (s - X') Q''$$

ここに $X' = \frac{7}{18} x D_x + \left(\frac{1}{3} y + \frac{1}{9a} z\right) D_y + \frac{2}{9} z D_z$.

$$b(s) = (s+1) \cdot \underset{\boxed{100}}{\left(s + \frac{4}{3}\right)} \underset{\boxed{110}}{\left(s + \frac{5}{3}\right)} \underset{\boxed{000}}{\left(s + \frac{23}{24}\right)} \left(s + \frac{25}{24}\right)\left(s + \frac{29}{24}\right)$$

$$\left(s + \frac{31}{24}\right)\left(s + \frac{35}{24}\right)\left(s + \frac{37}{24}\right)\left(s + \frac{41}{24}\right)\left(s + \frac{43}{24}\right).$$

$Q_{11}$ : $x^2z + y^3 + yz^3 + az^5$

$\mu = 11$. $1, x, x^2, y, xy, z, z^2, z^3, yz, yz^2, yz^3$

あるいは $yz^2, yz^3$ の かわりに $z^4, z^5$.

$$X_0 = \frac{7}{18}xD_x + \frac{1}{3}yD_y + \frac{2}{9}zD_z$$

$$X_2 = \frac{2}{5}xD_x + \frac{2}{5}yD_y + \frac{1}{5}zD_z, \quad X_3 = \frac{2}{5}xD_x + \frac{1}{3}yD_y + \frac{1}{5}zD_z.$$

$$Q = \frac{1}{3\varphi}\left\{(z+5ay)\left(-\frac{x}{2}D_x + zD_z\right) - 5a\,z^3D_y\right\}$$

$$Q' = \frac{1}{\varphi}\left\{\left(-y+\frac{5}{3}az^2\right)\left(-\frac{x}{2}D_x + zD_z\right) + z^3D_y\right\} \qquad \varphi = 1 + \frac{5^2a^2}{3}z$$

一階

$$x(s - X_0) + \frac{az^4}{18}D_x$$

$$y(s - X_0) + \frac{az}{9}Q$$

$$z(s - X_0) + \frac{a}{9}Q'$$

二階 $X_0' = X_0 - \frac{a}{9}z^2D_y$ とおいて.

$$\left(s - X_0 + \frac{1}{9}\right)(s - X_0') + \frac{5a^2}{3^2}\left\{Q - \frac{(z+5ay)}{\varphi}(s - X_3) + \frac{a}{9\varphi}Q'\right\}$$

or.

$$\left(s - X_0' + \frac{1}{9}\right)(s - X_0') + \frac{5^2a^2}{3}z(s - X_2)(s - X_3) - \frac{2a^2}{3^3}Q.$$

いずれにせよ 主要部 $\left(s - X_0 + \frac{1}{9}\right)(s - X_0)$.

$$b(s) = (s+1)\cdot\left(s+\frac{17}{18}\right) \quad 19 \quad 23 \quad 25 \quad 29 \quad 31$$

$$\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{11}{6}\right) \quad \left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)(s+2)$$

$Q_{12}$ : $x^2 z + y^3 + a y z^4 + z^5$.

$\mu = 12$ $\quad 1,\ x,\ y,\ xy,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ yz,\ yz^2,\ yz^3,\ yz^4.$

$$X_0 = \frac{5}{12} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{6} z D_z \qquad \theta = -\frac{x}{2} D_x + z D_z .$$

$$X_3 = \frac{2}{5} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{5} z D_z .$$

$$Q = \frac{1}{3\varphi}\left\{ \frac{a}{5}\left(\frac{4a}{5} y - z\right)\theta + z^2 D_y \right\} \qquad \varphi = 1 + \frac{4^2 a^3}{3\cdot 5^2} z^2$$

$$Q' = \frac{1}{15\varphi}\left\{ \left(3y + \frac{4a^2}{5} z\right)\theta - 4 a z^2 D_y \right\}$$

一階 $\quad x(s - X_3) + \frac{1}{15} a y z^3 D_x$

$\quad y(s - X_3) + \frac{2}{15} a z^2 Q$

$\quad z(s - X_3) + \frac{2}{15} a Q'$

二階 $\quad \left(s - X_3 + \frac{2}{15}\right)(s - X_3) - \frac{2^3 a^2}{3\cdot 5^2} z \left(Q - \frac{a(\frac{4}{5} a y - z)}{3\varphi}\right)(s - X_0)$

$b(s) = (s+1)\left(s + \frac{14}{15}\right)\left(s + \frac{16}{15}\right)$ 19 22 23 26 28

$\left(s + \frac{4}{3}\right)\left(s + \frac{2}{3}\right)$

固有多項式では $\quad x\left(s + \frac{4}{3}\right)\left(s + \frac{5}{3}\right)$

$S_{11}$: $\quad x^2z + yz^2 + y^4 + ay^3z.$

$\mu = 11. \quad 1^{\bullet} \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad xy^2 \quad y^2 \quad y^3 \quad yz \quad y^2z \quad y^3z.$

$$X_0 = \frac{5}{16}xD_x + \frac{1}{4}yD_y + \frac{3}{8}zD_z. \qquad Y_1 = -\frac{1}{4}xD_x + \frac{1}{2}zD_z$$

$$Y_2 = \frac{1}{16}xD_x + \frac{1}{4}yD_y - \frac{1}{8}zD_z \quad \left(\begin{matrix} x^2z \cdot yz^2 \cdot 0 \\ y^4 \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} y^4 \cdot x^2z \cdot 0 \\ yz^2 \end{matrix}\right)$$

$$Q = \frac{1}{4^2\varphi}\left[-10ay^2Y_1 + (4^2 + 5a^2y)zY_2\right] \qquad \varphi = 1 + \frac{5^2a^3}{2\cdot 4^3}z$$

$$Q' = \frac{1}{2\varphi}\left[2y^2Y_1 + a\left(\frac{5a}{8}z - y\right)zY_2\right]$$

一階
$$x(\rho - X_0) + \frac{a}{8}y^3D_x$$
$$y(\rho - X_0) + \frac{a}{8}Q$$
$$z(\rho - X_0) + \frac{a}{8}Q'$$

二階
$$(\rho - X_0 + \tfrac{1}{8})(\rho - X_0) - \frac{5a^2}{16}y(\rho - X_2)(\rho - X_3)$$

$X_2 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \quad X_3 = (\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ より

$$(\rho - X_0 + \tfrac{1}{8})(\rho - X_0) - \frac{5a^2y}{16 - 5a^2y}\left\{(2X_0 - X_2 - X_3 - \tfrac{1}{8})\rho + X_2X_3 - X_0^2 + \tfrac{1}{8}X_0\right\}$$

$$b(\rho) = (\rho+1)\cdot(\rho+\tfrac{3}{2})(\rho+\tfrac{5}{4})(\rho+\tfrac{7}{4}).(\rho+\tfrac{15}{16})(\rho+\tfrac{17}{16})(\rho+\tfrac{19}{16})(\rho+\tfrac{21}{16})$$
$$(\rho+\tfrac{23}{16})(\rho+\tfrac{25}{16})(\rho+\tfrac{27}{16})(\rho+\tfrac{29}{16})$$

$S_{12}$ : $\quad x^2z + yz^2 + xy^3 + ay^5$

$\mu = 12$. $\quad 1 . x . xy \quad xy^2 \quad xy^3$

$\quad y \quad y^2 \quad y^3 \quad y^4 \quad . z \quad yz . y^2z$ .

$$X_0 = \frac{1}{13}(4xD_x + 3yD_y + 5zD_z) \ , \quad Y_1 = xD_x + 4yD_y - 2zD_z$$

$(x^2z . yz^2 . 0)$

$$\Theta = zD_x - 2xD_y + 6y^2D_z$$

($\Theta$ $X_0$に関し just $\frac{1}{13}$ 次)

$$X_2 = \frac{1}{5}(2xD_x + yD_y + zD_z) \qquad X_3 = \frac{3}{10}xD_x + \frac{1}{5}yD_y + \frac{2}{5}zD_z .$$

~~一階~~

$$Q = \frac{1}{13\varphi}\left\{ yY_1 - \frac{20}{13}a(13y^3D_x - 2x\Theta)\right\} \qquad \varphi = 1 - \left(\frac{20a}{13}\right)^2 x$$

$$Q' = \frac{1}{13\varphi}\left\{(13y^3D_x - 2x\Theta) - \frac{20}{13}axyY_1\right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{13\varphi}\left\{\Theta + \frac{10}{13}ay(Y_1 - 20ay^2D_x)\right\}$$

一階 $\quad x(s - X_0) + \frac{2a}{13}yQ, \quad y(s - X_0) + \frac{2a}{13}Q',$

$$z(s - X_0) + \frac{2a}{13}y^2Q''.$$

二階 $\quad X_0' = X_0 - \frac{2a}{13}y^2D_x \quad$ とおいて,

$$\left(s - X_0' + \frac{2}{13}\right)(s - X_0') - \left(\frac{20a}{13}\right)^2 x(s - X_2)(s - X_3) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{2a}{13}\right)^2\left\{10xs - (y^3D_z + xX_3)\right\}$$

主要部は $\quad \left(s - X_0 + \frac{2}{13}\right)(s - X_0)$

$$b(s) = (s+1)\cdot\left(s + \frac{12}{13}\right)\left(s + \frac{14}{13}\right)\cdots\cdots\left(s + \frac{24}{13}\right)$$

+1 ずつ、$\frac{2}{13}$ ごとに出てくる.

$T_{p,q,r}$. $\quad f=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q+\frac{1}{r}z^r-axyz \qquad p,q,r\geq 3.$

$R_{p,q}=T_{3,p,q}$.

$\mu=p+q+r-1. \qquad \left.\begin{matrix}1,\ x,\ \cdots,\ x^{p-1}\\ y,\ \cdots\ y^{q-1}\\ z,\ \cdots\ z^{r-1}\end{matrix}\right\}$ と $xyz$.

$c=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1<0.$

$X_0=\frac{1}{p}xD_x+\frac{1}{q}yD_y+\frac{1}{r}zD_z \quad . \quad X=\frac{1}{3}(xD_x+yD_y+zD_z)$

$X_1=\left(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)xD_x+\frac{1}{q}yD_y+\frac{1}{r}zD_z.$ $\quad X_2, X_3$ も同様.

$\Phi_1=\frac{1}{2}(X_2+X_3)=\frac{1}{p}xD_x+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right\}yD_y+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right\}zD_z.$

$\Phi_2, \Phi_3$ も cyclic にかえて. $\qquad \varphi=a^3-x^{p-3}y^{q-3}z^{r-3}.$

$Q_x=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{p}\right)x^{p-3}\frac{1}{\varphi}\left(y^{q-3}z^{r-2}D_x+a^2xD_y+ay^{q-2}D_z\right)\frac{1}{\varphi}\left(y^{q-2}z^{r-3}D_x+az^{r-2}D_y+a^2xD_z\right)$

$Q_y, Q_z$ も cyclic にして, $\qquad Q=Q_x+Q_y+Q_z$ とおく.

一階 $\quad x(s-\Phi_1)+\frac{c}{2\varphi}\left\{2y^{q-2}z^{r-2}D_x+z^{r-3}(a^2z^2+x^{p-2}y^{q-2})D_y+y^{q-3}(a^2y^2+x^{p-2}z^{r-2})D_z\right\}$

$y(s-\Phi_2)+\frac{c}{2\varphi}\{\ \cdots\cdots$

cyclic にかえる.

$z(s-\Phi_3)+\frac{c}{2\varphi}\{\ \cdots$

a

二階. $\quad (s-X_0-c)(s-X)-\frac{2c}{\varphi}x^{p-3}y^{q-3}z^{r-3}\left(s-\frac{1}{2}(X_0+X)\right)+acQ$

$\boxed{000}$ から double. $\quad (s+1)^2$

$\boxed{i00}$ から $(1\leq i\leq p-2)\quad 1+\frac{i}{p}$ . $\boxed{p-1,00}+(-)^{p+1}\frac{(p-1)!}{a}\boxed{011}$ から $\quad 1+\frac{p-1}{p}$ etc..

$$b(s)=(s+1)\cdot(s+1)^2\left(\prod_{1\leq i\leq p-1}\left(s+1+\frac{i}{p}\right)\prod_{1\leq j\leq q-1}\left(s+1+\frac{j}{q}\right)\prod_{1\leq k\leq r-1}\left(s+1+\frac{k}{r}\right)\right)_{red}.$$

一階と二階で $\Phi$ と $X$ という要素をもってきてくる. もっとも, $X_1, X_2, X_3$ だけですますこともできる.

まず三階の作用素として,

$$(s-X_1)(s-X_2)(s-X_3) - a^{-3}x^{p-3}y^{q-3}z^{r-3}(s-X_0+2c)(s-X_0+c)(s-X_0)$$

というのがとれる. これらは $X_1, X_2, X_3$ をつかっている.
しかし二階ですますには, 少しクフウを要す. まず一階から.

$$\boxed{210} = \frac{-1}{\varphi}\left(y^{q-2}z^{r-3}D_x + a z^{r-2}D_y + a^2 x D_z\right)$$

$$\boxed{120} = \frac{-1}{\varphi}\left(a z^{r-2}D_x + x^{p-2}z^{r-3}D_y + a^2 y D_z\right)$$

などとして,

$$\begin{cases} y(s-X_1) - c x^{p-2}\,\boxed{210} \\ z(s-X_2) - c\, y^{p-2}\,\boxed{021} \\ x(s-X_3) - c\, z^{p-2}\,\boxed{102} \end{cases} \qquad \left(\text{or } \begin{cases} z(s-X_1) - c x^{p-2}\,\boxed{201} \\ \text{cyclic} \end{cases}\right)$$

という形にとっておき.

$$(s-X_1)(s-X_2) - c^2\,\boxed{210}\,\boxed{120}\,x^{p-3}y^{q-3} - \frac{c z^{r-3}}{\varphi}\,x^{p-3}y^{q-3}\,(3s - X_2 + 2X_0)$$

$$\left.\begin{array}{l}(s-X_2)(s-X_3) - \cdots \\ (s-X_3)(s-X_1) - \cdots\end{array}\right\}\ \text{などというのもとれる}$$

$$R_{p,q} = T_{3,p,q}.$$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)^2\left((s+\tfrac{4}{3})(s+\tfrac{5}{3})\Big(\prod_{1\le i\le p-1}(s+1+\tfrac{i}{p})\Big)\prod_{1\le j\le q-1}(s+1+\tfrac{j}{q})\right)_{\mathrm{red.}}$$

$U_{12}$ : $f = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}z^4 - axyz^2$

$\mu = 12$. $1,\ x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz,\ z^2,\ xz^2,\ yz^2,\ xyz,\ xyz^2$

$c = \frac{1}{6} > 0$.

$X_0 = \frac{1}{3}xD_x + \frac{1}{3}yD_y + \frac{1}{4}zD_z$. $\qquad \varphi = 1 - 2a^3z^2$

$Q_1 = \frac{a}{\varphi}\{\frac{z}{a}D_x + 2axzD_y + yD_z\} \qquad Q_2 = \frac{a}{\varphi}\{2ayzD_x + \frac{z}{a}D_y + xD_z\}$

$Q = Q_1Q_2 + Q_2Q_1$

一階 $x(s - X_0) - \frac{a}{6\varphi}z^2(yD_x + az^2D_y + a^2xzD_z)$

$y(s - X_0) - \frac{a}{6\varphi}z^2(az^2D_x + xD_y + a^2yzD_z)$

$z(s - X_0) - \frac{a}{6\varphi}\{(axz^2 + y^2)azD_x + (ayz^2 + x^2)azD_y + xyD_z\}$

二階 $(s - X_0 + c)(s - X_0) + \frac{a^2z^2}{6^2\varphi}(5s - (\frac{11}{6}(xD_x + yD_y) + \frac{3}{2}zD_z)) - \frac{a^2z^2}{12}Q$

$\boxed{000}$ $\frac{11}{12}, \frac{13}{12}$, $\begin{matrix}\boxed{010}\\ \boxed{100}\end{matrix}$ $\frac{5}{4}$, $\boxed{110}$ $\frac{19}{12}$, $\begin{matrix}\boxed{102} - a\boxed{020}\\ \boxed{012} - a\boxed{200}\end{matrix}$ $\frac{7}{4}$, $\boxed{001}$ $\frac{7}{6}$

$\begin{matrix}\boxed{011}\\ \boxed{101}\end{matrix}$ $\frac{3}{2}$, $\boxed{002}$ $\frac{17}{12}$, $\boxed{111} + \frac{a}{3}\boxed{003}$, $\frac{11}{6}$.

結局, $a = 0$ の場合 $xyz^2$ から出る $s + \frac{25}{12}$ の代りに $\boxed{000}$ から $s + \frac{13}{12}$.

固有多項式 $= (s+\frac{3}{2})^2(s+\frac{5}{4})^2(s+\frac{7}{4})^2(s+\frac{7}{6})(s+\frac{11}{6})(s+\frac{11}{12})(s+\frac{13}{12})(s+\frac{17}{12})(s+\frac{19}{12})$

$b(s) = (s+1)\cdot(s+\frac{3}{2})(s+\frac{5}{4})(s+\frac{7}{4})(s+\frac{7}{6})(s+\frac{11}{6})(s+\frac{11}{12}) \cdots\cdots (s+\frac{19}{12})$.

$O_{16}$ : $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3+u^3) - exyzu.$

$\mu = 16.$ $\quad 1.\ x.\ y.\ z.\ u.\quad x^2.\ y^2.\ z^2.\ u^2.\quad xy.\ yz.\ zu.\ ux.\ xz.\ yu.\ ;\ xyzu.$

$c = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$ $\qquad$ $yzu$ etc

$$X_0 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z + uD_u) \ .\ X_1 = \frac{1}{3}(yD_y + zD_z + uD_u) \text{ etc.}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\varphi_4}(exuD_y + yD_z + e^2x^2zD_u) \qquad \varphi_1 = 1 - e^3x^3$$

$$Q_2 = \frac{1}{\varphi_4}(yD_x + euzD_y + e^2xu^2D_z) \qquad \varphi_2 = 1 - e^3y^3$$

$$(\varphi_3 = 1 - e^3z^3)$$

$$Q_3 = \frac{1}{\varphi_2}(eyuD_x + xD_z + e^2y^2zD_u) \qquad \varphi_4 = 1 - e^3u^3$$

$$Q_4 = \frac{1}{\varphi_1}(zD_y + exuD_z + e^2x^2yD_u)$$

$$Q_5 = \frac{1}{\varphi_2}(e^2y^2uD_x + eyxD_z + zD_u)$$

一階. $\quad x(s - X_0) - \frac{e}{3}zuQ_2$ $\qquad$ (あまり対称性を保っていない)

$\qquad y(s - X_0) - \frac{e}{3}xuQ_4$

$\qquad z(s - X_0) - \frac{e}{3}yuQ_3$

$\qquad u(s - X_0) - \frac{e}{3}xyQ_5.$

二階. $\quad (s - X_0 + \frac{1}{3})(s - X_0) - e^2u^2Q_1Q_2 + \frac{e^2u^2}{\varphi_1}(euQ_3 + 2Q_4)$

$\boxed{0000} \to \frac{4}{3}, \frac{5}{3},\quad \boxed{0111} - \frac{e}{2}\boxed{2000} \to \frac{7}{3}.$

$\boxed{1000} \to \frac{5}{3}\quad ,\quad \boxed{1100} \longrightarrow \frac{6}{3} = 2.$

固有多項式 $= (s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})^5(s+\frac{7}{3})^4(s+2)^6$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})(s+\frac{6}{3})(s+\frac{7}{3})$$

この場合，$xyzu$から出るはずだった $\frac{8}{3}$ がろくなって．$\frac{5}{3}$になっている．そのため，$b(s)$では 既約剰余類が，$\frac{7}{3}$がハンパになってしまう．

$(E_7)$ $X_{p+5}$ : $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + ay^p$ $\quad p \geq 5.$ $\quad$ type $S_I$

$\mu = p+5.$ $\quad 1, x, x^2, x^3, y, y^2, \cdots, y^p, xy..$

$\begin{cases} p: \text{odd} & (2, p-2) \text{ knot と 2個の unknotted } S^1 \text{ の link.} \\ p: \text{even} & 4\text{個の unknotted } S^1 \text{ の link.} \end{cases}$

これと次の $Y_{p,q}$ は、くわしくのべた $S_I$ であるが、作用素などは略す。

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)^2\Bigl((s+\tfrac{3}{4})(s+\tfrac{5}{4})\prod_{\substack{1\leq j\leq p-1 \\ j\neq \frac{p}{2}}}(s+\tfrac{p+2j}{2p})\Bigr)_{red}.$$

$Y_{p,q}$ : $x^2y^2 + x^p + y^q.$ $\quad 5 \leq p \leq q.$ $\quad$ type $S_I.$

$p = q = 5$ のとき A'Campo の有名な $(x^2+y^3)(x^3+y^2)$

$\begin{cases} p: \text{odd } q: \text{odd.} & (2, p-2) \text{ knot と } (2, q-2) \text{ knot の link.} \\ p: \text{odd } q: \text{even} & (2, p-2) \text{ knot と 2個の unknotted } S^1 \text{ の link} \\ p: \text{even } q: \text{odd} & (2, q-2) \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \\ p: \text{even } q: \text{even} & 4\text{個の unknotted } S^1 \text{ の link.} \end{cases}$

$$b(s) = \underbrace{(s+1)\cdot(s+1)^2}_{\boxed{00}}\Bigl(\underbrace{\prod_{\substack{1\leq i\leq p-1 \\ i\neq \frac{p}{2}}}(s+\tfrac{p+2i}{2p})}_{\boxed{i0}}\underbrace{\prod_{\substack{1\leq j\leq q-1 \\ j\neq \frac{q}{2}}}(s+\tfrac{q+2j}{2q})}_{\boxed{0j}}\Bigr)_{red}.$$

$(\boxed{11} \rightarrow (s+1))$

$Z_{11}$ $\quad x^3y + y^5 - axy^4 \quad$ type $K^{\#}_{\mathrm{II}}$

$\mu = 11.$ $\quad x^iy^j \ \ {}^{i=0,1}_{0\le j\le 4}$ と $x^2$. $\quad a \ge m^6$ , $a$. $\ c = \frac{1}{15} > 0$.

$$X_0 = \frac{4}{15}xD_x + \frac{1}{5}yD_y \qquad . \qquad \theta = yD_y - \frac{1}{3}xD_x.$$

$$Q = \frac{1}{15\varphi}\left\{\left(\frac{11}{15}a^2x + ay\right)\theta + 5y^2D_x\right\} \qquad \varphi = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{11}{15}\right)^2 a^3 y$$

$$Q' = \frac{1}{15\varphi}\left\{\left(3x + \frac{11}{15}a^2y^2\right)\theta + \frac{11}{3}ay^3D_x\right\}$$

一階. $\quad x(s - X_0) + \frac{ay}{15}Q.$

$\qquad\quad y(s - X_0) + \frac{a}{15}Q'$

二階. $\quad (s - X_0 + \frac{1}{15})(s - X_0) - \frac{11a^2}{15^2}\left(Q - \frac{(\frac{11}{15}ax + y)a}{3\varphi}\right)\left(s - \left(\frac{3}{11}xD_x + \frac{2}{11}yD_y\right)\right)$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{7}{15}\right)\left(s+\frac{8}{15}\right)\left(s+\frac{11}{15}\right)\left(s+\frac{13}{15}\right)$$

$\boxed{20}$ $\quad \boxed{01}$ $\quad \boxed{13}$ $\quad \boxed{00}$

$$\left(s+\frac{14}{15}\right)\left(s+\frac{16}{15}\right)\left(s+\frac{17}{15}\right)\left(s+\frac{19}{15}\right).$$

$Z_{12}$ $\quad x^3y + ay^6 - xy^4$ $\quad$ type $K^b_{\mathrm{VI}}$

$\mu = 12.$ $\quad x^iy^j$ $\begin{matrix} i=0,1 \\ j=0\sim 4. \end{matrix}$ と $x^2.\ \cancel{y}x^3.$ $\quad \Omega \supseteq \mathfrak{m}^7$

$$X_2 = \frac{3}{11}xD_x + \frac{2}{11}yD_y\ ,\quad X_0 = \frac{5}{18}xD_x + \frac{1}{6}yD_y.\quad \theta = xD_x - 3yD_y.$$

$$Q = \frac{1}{\varphi}\left\{\frac{3}{11}\left(x + \frac{18}{11}y^2\right)\theta - y^3D_x\right\}\qquad \varphi = 1 - 3\left(\frac{18}{11}\right)^2 ay.$$

$$Q' = \frac{18}{11\varphi}\left\{\left(\frac{\cancel{18}3}{11}ax + \frac{y}{18}\right)\theta - ay^3D_x\right\}$$

一階 $\quad x(s - X_2) + \frac{1}{11}ay\,Q'$

$\quad\quad\ y(s - X_2) + \frac{1}{11}a\,Q.$

二階 $\quad \left(s - X_2 - \frac{y^2}{11}D_x + \frac{1}{11}\right)(s - X_2) - 3\left(\frac{18}{11}\right)^2 ay\left(s - X_0 - \frac{1}{18}\right)(s - X_0)$

より,

$$b(s) = (s+1)\cdot\underbrace{\left(s+\frac{5}{11}\right)}_{\boxed{00}}\left(s+\frac{6}{11}\right)\left(s+\frac{7}{11}\right)\left(s+\frac{8}{11}\right)\left(s+\frac{9}{11}\right)\underbrace{\left(s+\frac{10}{11}\right)}_{\boxed{03},\ \boxed{20}}(s+1)$$

$$\left(s+\frac{12}{11}\right)\left(s+\frac{13}{11}\right)\left(s+\frac{14}{11}\right)\left(s+\frac{15}{11}\right) \leftarrow \boxed{105}$$

$xy^4$に対応しては, $\boxed{06}$ と $\boxed{14}$ の combination で eigenvector とれず, それが悪そうだった $\frac{12}{11}$ のかわりに $\frac{6}{11}$.

$Z_{13}$ $\qquad x^3y + y^6 - axy^5 \qquad$ type $K^{\#}_{\mathrm{II}}$.

$\mu = 13$. $\qquad c = \frac{1}{9} > 0$

$$X_0 = \frac{5}{18} x D_x + \frac{1}{6} y D_y \qquad \theta = \frac{1}{2}(-xD_x + 3yD_y)$$

$$Q = \frac{1}{9\varphi}\left\{ \left(\frac{7}{9} ax + y\right)\theta + \frac{7^2a^2}{3^3} y^4 D_x \right\} \qquad \varphi = 1 - \frac{7^2a^3}{3^5} y^2$$

$$Q' = \frac{1}{9\varphi}\left\{ \left(x + \frac{7a^2}{3^3} y^3\right)\theta + \frac{7}{3} a y^4 D_x \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{3^3\varphi}\left\{ \left(\frac{7}{9} ax + y\right)\theta + 9y^2 D_x \right\}$$

一階 $\qquad x(s - X_0) - \frac{1}{9} a y^2 Q''$

$\qquad y(s - X_0) - \frac{1}{9} a Q'$

二階 $\qquad (s - X_0 + \frac{1}{9})(s - X_0) - \frac{a^2}{9^2}\left\{ Q'' - \frac{7}{2\cdot 9\varphi}\left(\frac{7}{9} ax + y\right) \right\} Q$

$$b(s) = (s+1)\left(s+\frac{4}{9}\right)\left(s+\frac{5}{9}\right) \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ \left(s+\frac{11}{9}\right)$$

$$\left(s+\frac{11}{18}\right)\left(s+\frac{13}{18}\right) \ 17 \ 19 \ 23 \ \left(s+\frac{25}{18}\right)$$

$W_{12}$ $\qquad x^4 + y^5 + a x^2 y^3 \qquad$ type $Y_I$.

($\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}y^5 - a x^2 y^3$ の形にとる)

$\mu = 12 \qquad x^i y^j \qquad \begin{matrix} i = 0.1.2 \\ j = 0.1.2.3. \end{matrix}$ $\qquad x^2y^3$ の $2_{\ast}$ $\sigma/m+(f)$ で不適.

$$X_0 = \frac{1}{4} x D_x + \frac{1}{5} y D_y. \qquad \varphi = 1 - 6a^2 y$$

一階. $\quad x(\rho - X_0) - \dfrac{a y^2}{10\varphi}(y D_x + 2a x D_y)$

$\qquad\quad y(\rho - X_0) - \dfrac{a x}{10\varphi}(3a y^2 D_x + x D_y)$

二階 $\quad (\rho - X_0 + \frac{1}{10})(\rho - X_0) - 6a^2 y\,(\rho - X_1)(\rho - X_2)$

$X_1 = \frac{1}{5} x D_x + \frac{1}{5} y D_y. \qquad X_2 = \frac{1}{4} x D_x + \frac{1}{6} y D_y.$ より

$$(\rho - X_0 + \tfrac{1}{10})(\rho - X_0) - \frac{6a^2 y}{\varphi}\left\{(2X_0 - \tfrac{1}{10} - X_1 - X_2)\rho + X_1 X_2 - X_0^2 + \tfrac{1}{10} X_0\right\}$$

これは全く典型的な $Y_I$ である.

$$b(\rho) = (\rho+1)\cdot(\rho + \underset{\boxed{20}}{\tfrac{9}{20}})(\rho + \tfrac{11}{20})(\rho + \tfrac{13}{20})(\rho + \tfrac{7}{10})(\rho + \tfrac{17}{20})(\rho + \tfrac{9}{10})$$
$$(\rho + \tfrac{19}{20})(\rho + \tfrac{21}{20})(\rho + \tfrac{11}{10})(\rho + \tfrac{23}{20})(\rho + \tfrac{13}{10})(\rho + \tfrac{27}{20})$$

既約な $\frac{\bullet}{10}$ と $\frac{\bullet}{20}$ が ムダナク one set 出ている.

$W_{13}$ : $x^4 + xy^4 + ay^6$ type $K_I^b \cap S_I'$

$\left(\frac{1}{4}x^4 - xy^4 + \frac{1}{6}ay^6\right.$ として $\left.\right)$

$\mu = 13.$ $1 . x . x^2 . \; y . y^2 , y^3 . y^4 . y^5 . \; xy . xy^2 . x^2y . x^2y^2$ と $y^6$

$$X_0 = \frac{1}{4}xD_x + \frac{1}{6}yD_y . \qquad \varphi = 1 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 y .$$

$$X_2 = \frac{1}{4}xD_x + \frac{3}{16}yD_y .$$

一階. $x(s - X_2) - \frac{ay}{4 \times 48\varphi}\left\{ ay^3 D_x + \left(\frac{a}{4}x^2 + y^2\right) D_y \right\}$

$y(s - X_2) - \frac{a}{4 \times 48\varphi}\left\{ 4y^3 D_x + x\left(x + \frac{a}{4}y^2\right) D_y \right\}$

二階 $\left(s - X_2 + \frac{1}{8}\right)\left(s - X_2 - \frac{ay^2}{48}D_x\right) - \left(\frac{a}{4}\right)^2 x \left(s - X_0 + \frac{1}{12}\right)(s - X_0)$ より

$b(s) = (s+1) \cdot \left(s + \frac{7}{16}\right)$ 9 11 13 15 17 19 21

$\left(s + \frac{5}{8}\right)$ 7 9 11 $\cdot$ $(s+1)$

$(E_8)$ $\quad J_{p+4} \qquad x^3+\varepsilon x^2y^2+ay^p \qquad \varepsilon^2=1 \quad p\geq 7.$

$\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{p}y^p-\frac{1}{2}x^2y^2\right.$ として $\left.\right) \qquad c=\frac{6-p}{3p}<0$

$\mu=p+4. \quad 1, y, \cdots, y^{p-2}, x, xy, xy^2, xy^3, \cancel{xy^4}$

or. $1, y, \ldots, y^{p-2}, y^{p-1}, \cancel{y^p}, x, xy, xy^2$ などで.

$$X_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)xD_x+\frac{1}{p}yD_y. \qquad X_0=\frac{1}{3}xD_x+\frac{1}{p}yD_y.$$

$$X_2=\frac{1}{3}xD_x+\frac{1}{6}yD_y. \qquad \varphi=1-ay^{p-6}$$

$$Q=\frac{-1}{\varphi}\{(x+y^2)yD_x+xD_y\}$$

一階. $\quad x(s-X_2)-\frac{ca}{2}y^{p-5}Q$

$\quad y(s-X_1)+\frac{c}{2}xD_y-\frac{ca}{2}y^{p-6}Q$

二階. $\quad (s-X_1)(s-X_2)-\frac{ca}{2}y^{p-7}Q(s-X_0)$

$$+\frac{ca}{\varphi}\left\{y(2s-X_0-X_1)+\frac{c}{2}Q\right\}$$

後2項は 一階をもって用いて $s$ なしの形にできる.

$$\text{固有多項式}=\overset{\boxed{9}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}\overset{\boxed{10}}{\left(s+\frac{5}{6}\right)}\overset{\boxed{11}}{(s+1)}\overset{\boxed{12}}{\left(s+\frac{7}{6}\right)}\prod_{1\leq j\leq p-1}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{j}{p}\right)$$

$x^3+\varepsilon x^2y^2+ay^p+z^2$ と $T_{2,3,p}$ $x^3+axyz+y^p+z^2$ とは従って固有多項式が同じになる. singularity の状態は同じであると Arnold も注意している.

$$b(s)=(s+1)\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(s+\frac{5}{6}\right)(s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right)\prod_{1\leq j\leq p-1}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{j}{p}\right)\right)_{red}.$$

$K_{12}$ :  $x^3 + axy^5 + y^7$  type $K_{I}^{\#}$

$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}y^7 - axy^5 \; z\, 12\right)$

$\mu = 12.$

$X_0 = \frac{1}{3}x\, D_x + \frac{1}{7}y\, D_y$,  $X_2 = \frac{1}{3}x\, D_x + \frac{2}{15}y\, D_y$, $\varphi = 1 - 25a^3 y$

$Q = \frac{1}{\varphi}\left\{ y^3 D_x + a(5ax + y^2) D_y \right\}$

$Q' = \frac{1}{\varphi}\left\{ 5ay^4 D_x + (x + 5a^2y^3) D_y \right\}$

一階.  $x(s - X_0) - \frac{a}{21} Q'$

$y(s - X_0) - \frac{a}{21} y^2 Q$

二階.  $(s - X_0 + \frac{1}{21})(s - X_0) - \frac{5}{21}\left\{ Q(s - X_2) - \frac{7y}{\varphi}(2s - X_0 - X_2) \right\}$

$b(s) = (s+1) \cdot (s + \frac{10}{21})$ 11 13 16 17 19 20 22 23 25 26 29.

$\frac{\bigcirc}{21}$ one set.

$K_{13}$: $\quad x^3 + xy^5 + ay^8 \qquad$ type $K_I^b \cap S_I'$

$\left( \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}ay^8 - xy^5 \quad z(2) \right)$

$$X_0 = \frac{1}{3}xD_x + \frac{1}{8}yD_y, \quad X_2 = \frac{1}{3}xD_x + \frac{2}{15}yD_y, \quad \varphi = 1 - \frac{a^2y}{5^2}.$$

$$Q = \frac{-1}{5\varphi}\left\{ ay^4D_x + \left(\frac{ax}{5} + y^2\right)D_y \right\}, \quad Q' = \frac{-1}{5\varphi}\left\{ y^4D_x + \left(\frac{1}{5}x + \frac{ay^3}{5^2}\right)D_y \right\}.$$

一階. $\quad x(s - X_2) + \frac{ay^2}{120}Q$

$\quad y(s - X_2) + \frac{a}{120}Q'$

二階. $\quad \left(s - X_2 + \frac{1}{15}\right)\left(s - X_2 - \frac{ay^3}{120}D_x\right) - \frac{a^2y}{5^2}\left(s - X_0 - \frac{1}{24}\right)(s - X_0)$

$K_{14}.$ $\qquad x^3 + y^8 + axy^6 \qquad K_I^{\#}$

$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}y^8 - axy^6 \ \varepsilon 12\right)$

$\mu = 14.$ $\qquad c = \frac{1}{12} > 0.$

$$X_0 = \frac{1}{3} x D_x + \frac{1}{8} y D_y. \qquad \varphi = 1 - 6^2 a^3 y^2$$

$$X_2 = \frac{1}{3} x D_x + \frac{1}{9} y D_y.$$

$$Q = \frac{1}{\varphi}\{ y^3 D_x + a(6ax + y^2) D_y \}$$

$$Q' = \frac{1}{\varphi}\{ 6ay^5 D_x + (x + 6a^2 y^4) D_y \}$$

$$Q'' = \frac{1}{\varphi}\{ 6^2 a^2 y^5 D_x + (6ax + y^2) D_y \}$$

一階. $\quad x(s - X_0) - \frac{a}{12} y^3 Q$

$\qquad\quad y(s - X_0) - \frac{a}{12} Q'$

二階. $\quad (s - X_0 + \frac{1}{12})(s - X_0) - \frac{a^2}{2}\left(yQ - \frac{8a(6ax+y^2)}{\varphi}\right)(s - X_2)$

あるいは, $\quad (s - X_0 + \frac{1}{12})(s - X_0) - \frac{a^2}{12^2} Q \cdot Q''$

$\qquad\qquad + \frac{9a}{24\varphi}(6ax + y^2)(s - X_2)$

$$b(s) = (s+1) \cdot \left(s + \frac{11}{24}\right) \ 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 25 \ 29 \ 31$$

$$\left(s + \frac{7}{12}\right) \ 11 \ 13 \ 17 \quad \left(s + \frac{5}{3}\right) \ 7$$

## 4. b 函数一覧表.

2. 3. に対する $b(s)$ の一覧表であるが、$b(s)/(s+1) = \prod(s+\alpha)$ の $\alpha$ を記す. $\frac{b}{a}\cdot c \cdots$ とは $\frac{b}{a}\,\frac{c}{a} \cdots$.

(i) w-h.

初めに書くのが $\boxed{\circ\circ}$ ($\boxed{\circ\circ\circ}$) に対する固有値. ○, △, ▽をつけたものは, 固有多項式ではそれぞれ double, triple, quadruple.

$A_k$ $\quad \frac{1}{k+1}, \cdots, \frac{k}{k+1}$.

$D_k$ $\quad \frac{k-2}{2(k-1)}+\frac{1}{k-1}, \cdots, \frac{k-2}{2(k-1)}+\frac{k-1}{k-1} \;;\; 1$

($k$: even では. 初めのほうにも 1 が出る. $b(s)$ では はぶくこと)

$E_6$ $\quad \frac{7}{12}\ 11\ 13\ 17 \;;\; \frac{5}{6}\ 7$

$E_7$ $\quad \frac{5}{9}\ 7\ 8\ 10\ 11\ 13 \;;\; 1$

$E_8$ $\quad \frac{8}{15}\ 11\ 13\ 14\ 16\ 17\ 19\ 22$.

$\tilde{E}_6 = P_8$ $\quad 1, 2 \;;\; \frac{4}{3}\ 5$.

$\tilde{E}_7 = X_9$ $\quad \frac{1}{2}\cdot 3 \;;\; \frac{3}{4}\ 5 \;;\; 1$.

$\tilde{E}_8 = J_{10}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot 3 \;;\; \frac{5}{6}\ 7 \;;\; \frac{2}{3}\cdot 4 \;;\; 1$

$Q_{14}$ $\quad \frac{11}{12}\ 13\ 17\ 19\ 23\ 25 \;;\; \frac{5}{4}\ 7 \;;\; \frac{4}{3}\ 5$.

$S_{14}$ $\quad \frac{9}{10}\ 11\ 13\ 17\ 19\ 21 \;;\; \frac{6}{5}\ 7\ 8\ 9 \;;\; \frac{3}{2}$

$U_{14}$ $\quad \frac{8}{9}\ 10\ 11\ 13\ 14\ 16\ 17\ 19 \;;\; \frac{4}{3}\ 5$.

$V_{15}$ $\quad \frac{7}{8}\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17 \;;\; \frac{5}{4}\ 7 \;;\; \frac{3}{2}$.

$Z_{15}$ $\quad \frac{3}{7}\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 11 \;;\; 1$

$W_{15}$ $\quad \frac{5}{12}\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19 \;;\; \frac{5}{6}\ 7 \;;\; \frac{2}{3}\ 4 \;;\; 1$.

$N_{16}$ $\quad \frac{2}{5}\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8 \;;\; 1$

$K_{16}$ $\quad \frac{4}{9}\ 5\ 7\ 8\ 10\ 11\ 13\ 14 \;;\; \frac{2}{3}\ 4 \;;\; 1$

(ii) non-quasi-hom.

見方はおおむね同じ. $b(s)$ に double のおこるときは $(s+1)^2$ などと明記する。その他は初めの2つが $\boxed{\circ\circ}$ ($\boxed{\circ\circ\circ}$) からの固有値. 尚 $X_{p+5}, Y_{p,q}$ では, $(\quad)_{red}$ 内に $(s+1)$ があらわれるが, それらは $b(s)$ でははぶき, 固有多項式では red をとってそのままでいい. $O_{16}$ は特別. ・は固有値shift型.

$P_{p+5}$ $\quad (s+1)^2 \left( (s+\frac{4}{3})^2 (s+\frac{5}{3})^2 \prod_{1}^{p-1} (s+1+\frac{i}{p}) \right)_{red}$.

・ $Q_{10}$ $\quad \frac{23}{24}\ 25\ 29\ 31\ 35\ 37\ 41\ 43\ ;\ \frac{4}{3}\ 5$.

・ $Q_{11}$ $\quad \frac{17}{18}\ 19\ 23\ 25\ 29\ 31\ ;\ \frac{7}{6}\ 11\ ;\ \frac{4}{3}\ 5\ ;\ \frac{3}{2}$.

・ $Q_{12}$ $\quad \frac{14}{15}\ 16\ 17\ 19\ 22\ 23\ 26\ 28\ ;\ \frac{4}{3}\ 5$.

・ $S_{11}$ $\quad \frac{15}{16}\ 17\ 19\ 21\ 23\ 25\ 27\ 29\ ;\ \frac{5}{4}\ 7\ ;\ \frac{3}{2}$

・ $S_{12}$ $\quad \frac{12}{13}\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24$.

$T_{p.q.r.}$ $\quad (s+1)^2 \left( \prod_{1}^{p-1} (s+1+\frac{i}{p}) \prod_{1}^{q-1} (s+1+\frac{i}{q}) \prod_{1}^{r-1} (s+1+\frac{k}{r}) \right)_{red}$.

・ $U_{12}$ $\quad \frac{11}{12}\ 13\ 17\ 19\ ;\ \frac{7}{6}\ 11\ ;\ \frac{5}{4}\ 7\ ;\ \frac{3}{2}$.

・ $O_{16}$ $\quad \frac{4}{3}\ 5^*\ 7^*\ ;\ 2^*$. $\quad$ (固有多項式 $= (s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})^5 (s+2)^6 (s+\frac{7}{3})^4$)

$X_{p+5}$ $\quad (s+1)^2 \left( (s+\frac{4}{3})(s+1)^2 (s+\frac{5}{3}) \prod_{1}^{p-1} (s+\frac{p+2j}{2p}) \right)_{red}$.

$Y_{p.q.}$ $\quad (s+1)^2 \left( (s+1) \prod_{1}^{p-1} (s+\frac{p+2i}{2p}) \prod_{1}^{q-1} (s+\frac{q+2i}{2q}) \right)_{red}$.

・ $Z_{11}$ $\quad \frac{7}{15}\ 8\ 11\ 13\ 14\ 16\ 17\ 19\ ;\ \frac{2}{3}\ 4\ ;\ 1$.

・ $Z_{12}$ $\quad \frac{5}{11}\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 15\ ;\ 1$.

・ $Z_{13}$ $\quad \frac{4}{9}\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ ;\ \frac{11}{18}\ 13\ 17\ 19\ 23\ 25$.

・ $W_{12}$ $\quad \frac{9}{20}\ 11\ 13\ 17\ 19\ 21\ 23\ 27\ ;\ \frac{7}{10}\ 9\ 11\ 13$.

・ $W_{13}$ $\quad \frac{7}{16}\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ ;\ \frac{5}{8}\ 7\ 9\ 11\ ;\ 1$.

$J_{p+4}$ $\quad (s+\frac{1}{2})^2 \left( (s+\frac{5}{6})(s+1)(s+\frac{7}{6}) \prod_{1}^{p-1} (s+\frac{1}{2}+\frac{i}{p}) \right)_{red}$

・ $K_{12}$ $\quad \frac{10}{21}\ 11\ 13\ 16\ 17\ 19\ 20\ 22\ 23\ 25\ 26\ 29$.

・ $K_{13}$ $\quad \frac{7}{15}\ 8\ 11\ 13\ 14\ 16\ 17\ 18\ ;\ \frac{3}{5}\ 4\ 6\ 7\ ;\ 1$.

・ $K_{14}$ $\quad \frac{11}{24}\ 13\ 17\ 19\ 23\ 25\ 29\ 31\ ;\ \frac{7}{12}\ 11\ 13\ 17\ ;\ \frac{5}{3}\ 7$.

(iii) 雑感.

quasi-hom たちの方では, 固有多項式でにぎやかに double, triple $N_{16}$ では $(s+1)^4$ などとなっている。
それに比べて, non-quasi-hom の方ではかなりさびしい.

尚, 初めにのべておいたように, (ii) の要現系列の P, X, Y, J, R (←前頁でかきわすれた) はすべて $T_{p,q,r}$ の特別な場合とおもっていい. (T は 3 変数, XYJ 2変数)
すべて $b(s)$ に double factor が一つづつ出ている.

$O_{16}$ は, parameter をもう少し generic な値にしてやってみるべきであろう.

・$S_{12}$ の 13乗根. $K_{12}$ の 21乗根 の配列など, みごとなものである. quasi-hom にしてしまうと, (i.e. この場合 $a=0$ とおく) 2番目にかいた固有値がうしろへとんでいく. まことに, 見苦しくなる. quasi-hom とは特殊な状況にすぎず, non-quasi の方が, $b(s)$ が美しいというのは, おもしろいことである.

# 第Ⅲ章 Non-isolated case

non-isolated も含む，詳しい理論については 柏原[ ]をみよ.

singularity の strata $\{\Sigma\}$ に対し， $i=2,\cdots,n$

$b_i(s)$ を $\bigoplus_{\mathrm{codim}\,\Sigma=i} \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\Sigma)$ の $s$ の minimal polynomial $b_1(s)=s+1$ とすれば，

$$\mathrm{l.c.m}(b_i) \mid b(s) \mid \prod_{i=1}^{n} b_i(s)$$

注目すべきことは，次元の異なる strata から，$s+\alpha$ という同じ factor が出るとき，$b(s)$ で，ダブルになるとはかぎらない，ということである。

p.107〜115 に，修論におけるもの（を多少修正）したものをかかげ，p.115 と p.116 の間に，現在わかっている non-isolated 関係のことをしるす.

1. $x^3+y^2z+tz^4$, 2. cubic cones in $\mathbb{C}^3$ 3. $x^2+y^2z$
4. $x^2+y^2z^2$, 5. $x^3+y^2z^2$, 6. $x^3+y^2z^3$, 7. $x^n+y^nz$
8. $x^4+2tx^2y^2+y^4$.

115⇔116. Non-isolated case 補遺.

I. $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$ となる $P(s)$ の構成について.

1. 一般的方法
2. Brieskorn polynomial.
3. $x^5+y^5+tx^3y^3$

II. Join Conjecture

1. Conjecture
2. $f(t,x)=\frac{1}{n}t^n+g(x)$

III. examples.

1. $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 2. $x^n+y^lz^m$ 3. $x_1x_2^{p_1}+\cdots+x_{2k-1}x_{2k}^{p_k}$
4. $(x_1x_2)^2+\cdots+(x_{2k-1}x_{2k})^2$ 5. $(xy)^n+(yz)^n+(zx)^n-(xyz)^m$

1. $x^3+y^2z+tz^4$

$t=0$. non-isolated. (cusp たち) (佐藤)
$t\neq 0$ isolated q-hom. (24; 8, 9, 6) 4 jet として sufficient.
(i.e. これに 5 jet 以上をつけても, 又これに変換される).

$t=0$. $Q=\frac{1}{27}D_x^3-\frac{1}{4}D_y^2D_z$ として,

$$P(s)=-\frac{1}{3}\left(s+\frac{5}{6}\right)D_x\left(xQ-\frac{2}{9}\left(s+\frac{5}{4}\right)D_x^2\right)+\left(s+\frac{5}{3}\right)D_z\left(zQ+\frac{1}{2}\left(s+\frac{5}{4}\right)D_y^2\right)$$

$$P(s)f^{s+1}=(s+1)\,\vdots\,\left(s+\frac{5}{6}\right)\left(s+\frac{7}{6}\right)\,\vdots\,\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)$$

ここで, 第1 factor は non singular part から
第2の $(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$ はならんでいる cusp から
第3の $(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$ は原点から出ている.

実際, $s+1$ は $\delta(f)$. $s+\frac{5}{6}$ は $\frac{1}{\sqrt{z}}\delta(x)\delta(y)$
$s+\frac{7}{6}$ は $\frac{1}{\sqrt{z}}\delta'(x)\delta(y)$. $(s+\frac{4}{3}$ は $\delta(x)\delta'(y)\delta(z)$
$s+\frac{5}{3}$ は $\delta'(x)\delta'(y)\delta(z)$

$(\xi,\eta,\zeta)\equiv s\,\mathrm{grad}\log f=\frac{s}{f}(3x^2,2yz,y^2)$ とし,
$W=$ closure of $\{(x,y,z;\frac{s}{f}(3x^2,2yz,y^2);s)\}$
$J$: defining ideal of $W$. ($J$ は $\mathcal{J}$ の symbol ideal の radical)
一般に一致するとはいえない…

$J$ の generators: $\frac{1}{3}x\xi+z\zeta-s$, $\frac{1}{2}y\eta-z\zeta$, $\frac{1}{2}y^2\xi-x^2\zeta$, $\frac{1}{3}yz\xi-\frac{1}{2}x^2\eta$
$\mathcal{J}$ 〃 : $\frac{1}{3}xD_x+zD_z-s$, $\frac{1}{2}yD_y-zD_z$, $\frac{1}{2}y^2D_x-x^2D_z$, $\frac{1}{3}yzD_x-\frac{1}{2}x^2D_y$.

この b-函数の因子のくみあわせ方に対して, Hasse diagram による, ある種の解釈を, 佐藤が与えている。

さて，$t \neq 0$ では　$\chi_0 = \frac{1}{24}(8x\partial_x + 9y\partial_y + 6z\partial_z)$　$\chi_0 f = f$.

$$b_{t\neq 0}(s) = (s+1)\left\{(s+\tfrac{23}{24})(s+\tfrac{29}{24})(s+\tfrac{31}{24})(s+\tfrac{35}{24})(s+\tfrac{37}{24})(s+\tfrac{41}{24})\right.$$
$$\left.\cdot(s+\tfrac{43}{24})(s+\tfrac{49}{24})\right\}(s+\tfrac{4}{3})(s+\tfrac{5}{3})$$

原始24乗根に対応するもののうちは，$\frac{25}{24}$ がぬけて，$\frac{49}{24}$ が出ている。もうおなじみのことだが，

$x^3+y^2z+tz^4+axy^3$ とでもすれば，non-quasi-hom になり，固有値はずれてきて，$\frac{49}{24}$ がなくなり，$\frac{25}{24}$ が出る。*

ここで注目すべきは，$(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$ があることである。

$s+\frac{4}{3}$ は $\boxed{010}$ より，$s+\frac{5}{3}$ は $\boxed{110}$ から出るが，これは non-isolated のときと同じ事情である。

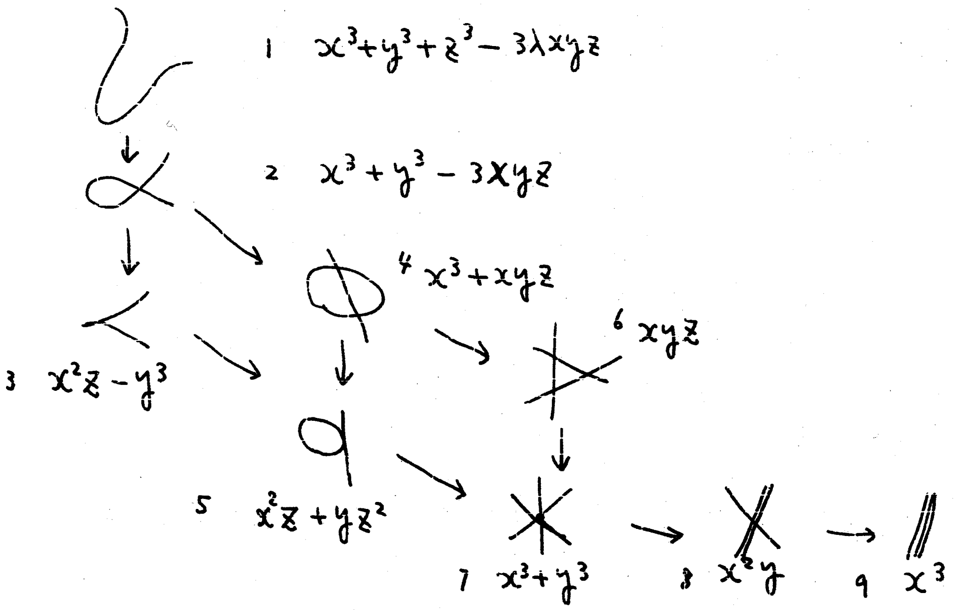
つまり，isolated のときも，specialize $t=0$ にした non-isol. でも，原点から出るべきものの，いくつかは保存している。一般に，どういうことがあるのだろうか？

* $\chi_0(t\boxed{120}+\frac{1}{12}\boxed{103}) = \frac{-49}{24}(t\boxed{120}+\frac{1}{12}\boxed{103})$

$\chi_0(t\boxed{020}+\frac{1}{12}\boxed{003}) = -\frac{41}{24}(t\boxed{020}+\frac{1}{12}\boxed{003})$　となっていて，

この2つが $B_{\mathrm{pt}}$ ですするとき，$t$ を表す。$\Omega^2$ でするとは関係ないが．

2. cubic cones in $\mathbb{C}^3$




1. (isolated sing.) $(s+1)^2\cdot(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})(s+2)$

2. $(s+1)^3\,(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$

3. (例1) $(s+1)\,(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})\,(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$

4. $(s+1)^3(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$

5 $(s+1)^2(s+\frac{3}{4})(s+\frac{5}{4})$

6 $(s+1)^3$

7 $(s+1)^2(s+\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})$

8 $(s+1)^2\,(s+\frac{1}{2})$

9 $(s+1)\,(s+\frac{1}{3})(s+\frac{2}{3})$

1. 以外は、 $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$ となる $P(s)$ を具体的にもとめてある。
2. 4. 5 は厳密にいうと、上に書いた式を $b(s)$ がわる、というのであるが、これで正しいことは、ほぼ疑いない。

3. $x^2+y^2z$ (佐原)

$$\left(\frac{1}{4}\overset{s+1.}{(s+1)}D_x^2+D_z\left(\frac{1}{4}zD_x^2+\frac{1}{4}D_y^2\right)\right)f^{s+1}=(s+1)^2\left(s+\frac{3}{2}\right)f^s .$$

$\delta(f)\to(s+1)$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{z}}\delta(x)\delta(y)\to(s+1)$ $\qquad \delta(x)\delta''(y)\delta(z)\to s+\frac{3}{2}$.

$f=0$ $\qquad x=y=0.$ $\qquad x=y=z=0.$

$\mathcal{J}$ の generators. $\qquad \frac{1}{2}xD_x+zD_z-s.$

この3つで生成した $\to$ $\frac{1}{2}yD_y-zD_z$, $\frac{1}{2}y^2D_x-xD_z$, $yzD_x-xD_y$
ideal を $\mathcal{J}_0$ とする.

$\mathcal{D}/\mathcal{J}_0+\mathcal{D}f$ が，次の様に分解され，これが $b$ の factor と対応していることを知る.

$\mathcal{M}_2=\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2 \quad \mathcal{J}_2=\mathcal{J}_0+\mathcal{D}f$ $\qquad f=0.$

$\mathcal{M}_1=\mathcal{J}_0/\mathcal{J}_1 \quad \mathcal{J}_1=\mathcal{J}_0+\mathcal{D}x+\mathcal{D}y^2+\mathcal{D}yz.$ $\qquad (x,y^2,yz)\Leftrightarrow x=y=0$

$\mathcal{M}_0=\mathcal{D}/\mathcal{J}_0 \quad \mathcal{J}_0=\mathcal{J}_0+\mathcal{D}x+\mathcal{D}y^2+\mathcal{D}z$ $\qquad (x,y^2,z)\Leftrightarrow x=y=0$

又，$x^2+y^2z+tz^4$ としてみると，

$$b(s)=(s+1);\left(s+\frac{9}{8}\right)\left(s+\frac{11}{8}\right)\left(s+\frac{13}{8}\right)\left(s+\frac{15}{8}\right);\left(s+\frac{3}{2}\right)$$

この場合も，non singular part の $(s+1)$ と原点の $(s+\frac{3}{2})$ があり.

$x^2+y^2z$ の Milnor fibering $=\mathbb{Z}_2 * S^1\simeq S^2$

monodromies. $\quad h_0: H_0(S^2)\to H_0(S^2)$ $\underset{\sim\sim}{\text{id}}$ $\quad$ ch. poly $(t-1)$

$h_1=0$

$h_2: H_2(S^2)\to H_2(S^2)$ $\quad$ i.e. $\underline{h_2=-1}$ $\quad$ ch. poly $(t+1)$

$$\begin{array}{ccc} H_2(S^2) & \to & H_2(S^2) \\ \| & & \| \\ \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_2)\otimes\tilde{H}_1(S^1) & \to & \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_2)\otimes\tilde{H}_1(S^1) \end{array}$$

$(-1)$ $\qquad 1$

よって， ch. poly の積 $=(t-1)(t+1)$

$$b=(s+1)(s+1)\left(s+\frac{3}{2}\right)$$

4. $x^2+y^2z^2$ (松本)

$B = \left\{ \frac{1}{4}(s+1) z D_x^2 + \frac{1}{2} D_z \left( \frac{1}{4} z^2 D_x^2 + \frac{1}{4} D_y^2 \right) \right\}$ として,

$$\left( \frac{1}{4}(s+1)(s+\tfrac{3}{2}) D_x^2 + \frac{1}{2} D_z B \right) f^{s+1} = (s+1)^3 (s+\tfrac{3}{2}) f^s$$

$$\left( \begin{array}{ll} x^2 \text{ の } b\text{-関数は} & (s+1)(s+\tfrac{1}{2}) \\ y^2z^2 \text{ の } b\text{-関数は} & (s+1)^2(s+\tfrac{1}{2})^2 \end{array} \right)$$

$x^2+y^2z^2$ の Milnor fibering $\quad Z_2 * (S^1 \cup S^1) \quad$ $H_0 = \mathbb{C}$, $H_1 = \mathbb{C}$, $H_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

$h_0 : H_0(F) \to H_0(F)$ $\quad \underline{id.} \quad (t-1)$

$$\begin{array}{llcl} h_1 : & H_1(F) & \longrightarrow & H_1(F) \\ & \parallel & & \parallel \\ & \tilde{H}_0(Z_2) & \xrightarrow{-1} & \tilde{H}_0(Z_2) \qquad \underline{id} \qquad (t-1) \\ & \otimes & & \otimes \\ & \tilde{H}_0(S^1 \cup S^1) & \xrightarrow{-1} & \tilde{H}_0(S^1 \cup S^1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} h_2 : & H_2(F) & \longrightarrow & H_2(F) \\ & \parallel & & \\ & \tilde{H}_0(Z_2) & \xrightarrow{-1} & \tilde{H}_0(Z_2) \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t^2-1) \\ & \otimes & & \otimes \\ & \tilde{H}_1(S^1 \cup S^1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & \tilde{H}_1(S^1 \cup S^1) \end{array}$$

よって, ch. poly の積 $= (t-1)^3(t+1)$

$\qquad\qquad b = (s+1)^3(s+\tfrac{3}{2})$

5. $x^3+y^2z^2$ (松本)

$$C=\left[\frac{1}{9}\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{7}{6}\right)D_x^2+\frac{1}{2}D_z\left\{\frac{1}{9}\left(s+\frac{5}{3}\right)zD_x^2+\frac{1}{2}D_y\left(\frac{1}{9}yzD_x^2+\frac{1}{4}xD_yD_z\right)\right\}\right]$$

$$D=\frac{1}{4}\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{7}{6}\right)^2D_y^2+\frac{1}{3}z^2D_xC$$

$$E=\frac{1}{2}D_zD+\frac{1}{3}\left(s+\frac{5}{6}\right)zD_xC$$

$$F=\frac{1}{2}D_zE+\frac{1}{3}\left(s+\frac{5}{6}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)D_xC$$

とおけ.

$$F f^{s+1}=(s+1)\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)^2\left(s+\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\left(\begin{array}{ll} x^3 \to (s+1)\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{2}{3}\right) \\ y^2z^2 \to (s+1)^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right)$$

$x^3+y^2z^2$ の Milnor fibre $\mathbb{Z}_3 * (S^1\cup S^1) \simeq$ 

∘ $H_0(F)\to H_0(F)$ id. $\qquad t-1$

∘ $H_1(F)\longrightarrow H_1(F)$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}} & \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) \\ \otimes & & \otimes \\ \widetilde{H}_0(S^1\cup S^1) & \xrightarrow[-1]{} & \widetilde{H}_0(S^1\cup S^1) \end{array}$$

$h_1=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\qquad t^2-t+1$

∘ $H_2(F)\longrightarrow H_2(F)$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}} & \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) \\ \otimes & & \otimes \\ \widetilde{H}_1(S^1\cup S^1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}} & \widetilde{H}_1(S^1\cup S^1) \end{array}$$

$h_2=\left(\begin{array}{cc|cc}0&&0&1\\&&-1&-1\\\hline 0&1&&\\-1&-1&&0\end{array}\right)$ $\qquad t^4+t^2+1$

ch. poly の 積. $=(t-1)(t^2-t+1)(t^4+t^2+1)$

$=(t-1)(t-\omega^2)(t-\omega)(t+\omega)^2(t+\omega^2)^2 \qquad \omega^3=1$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$$b(s)=(s+1)\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)^2\left(s+\frac{7}{6}\right)^2$$

バッチリあってる。

6. $x^3+y^2z^3$ （松本）

~~趣旨~~注，松本氏の計算では，（大変複雑）

$b(s) \mid (s+1)^3(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})(s+\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})^2(s+\frac{5}{3})$ 　↓ 答 矢野

がわかっている。 $b(s)=(s+1)^2(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})(s+\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})$

Milnor fibre $Z_3 * S^1 \simeq S^2 \vee S^2$ （cf. 　）

$h_0: H_0(F) \to H_0(F)$ 　id. 　$t-1$

$h_1$: 0

$h_2: H_2(F) \to H_2(F)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_0(Z_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}} & \tilde{H}_0(Z_3) \\ \otimes & & \otimes \\ \tilde{H}_1(S^1) & \xrightarrow{id} & \tilde{H}_1(S^1) \end{array} \qquad t^2+t+1$$

ch. poly の積 $= (t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$

してみると $b(s)$は $(s+1)(s+\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})$ を因子にもつ事となる

しかし，$y=1$ で $x^3+z^3 \to (s+1)^2(s+\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})$

$z=1$ で $x^3+y^2 \to (s+1)(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$

を考えると，$(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$ が $b(s)$ にあるかもっとも，よく検討すべきである。

7. $x^m + y^n z$ ~~[illegible]~~ (矢野)

$f$ の generators $X_0 = s - \left(\frac{1}{m} x D_x + z D_z\right)$

$X_1 = \frac{1}{n} y D_y - z D_z$, $X_2 = \frac{1}{m} y^n D_x - x^{m-1} D_z$, $X_3 = \frac{1}{m} y^{n-1} z D_x - \frac{1}{n} x^{m-1} D_y$

$$\begin{cases} (s+1) \longleftrightarrow \delta(f) \\ s + \frac{\mu+1}{m} + \frac{\nu+1}{n} \longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[n]{z^{\nu+1}}} \delta^{(\mu)}(x)\, \delta^{(\nu)}(y) & \begin{array}{l} 0 \le \mu \le m-2 \\ 0 \le \nu \le n-2 \end{array} \\ s + \frac{\mu+1}{m} + 1 \longleftarrow \delta^{(\mu)}(x)\, \delta^{(n-1)}(y)\, \delta(z) \end{cases}$$

$$b(s) = (s+1) \left( \prod_{\substack{0 \le \mu \le m-2 \\ 0 \le \nu \le n-1}} \left(s + \frac{\mu+1}{m} + \frac{\nu+1}{n}\right) \right)_{red}$$

(注1)

(これは $x^n + y z^m$ に対する計算)

~~Milnor fibre 等 Topology からすぐわかるだろうが.~~

$$\begin{cases} \frac{1}{n} D_x f^{s+1} = x^{n-1} (s+1) f^s \\ \left(\frac{1}{n^2} z^{m-1} + \frac{1}{m} D_y D_z\right) f^{s+1} = x^{n-2} z^{m-1} (s+1)\left(s+1+\frac{n-1}{n}\right) f^s \\ D_y f^{s+1} = z^m (s+1) f^s \end{cases}$$

この3つの式を initial data としてやっていく.

この場合, 原点からの factor と, $x=y=0$ からの factor とに同じ $(s+\alpha)$ があったとしても, $b$ ではダブらないことは注目に値する.

8. $x^4 + 2t x^2 y^2 + y^4$ （相区）

これは cross ratio. （t を parameter とおもえば）

Arnold $X_9$ = Saito $\widetilde{E}_7$ isolated ~~~~ homogeneous.

$$b(s) = (s+1)^3 (s+\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{3}{2})(s+\tfrac{3}{4})(s+\tfrac{5}{4})$$

今, $x^4 + 2z x^2 y^2 + y^4$ として, 3変数 non-isolated polynomial とおもおう. そうすると,

$$b(s) = (s+1)^3 (s+\tfrac{1}{2})(s+\tfrac{3}{4})(s+\tfrac{5}{4})$$

$(s+\frac{3}{2})$ が消失する.

この事情, 幾何学的立場からは, 別に不思議ではないらしい.

# I. $P(s) f^{s+1} = b(s) f^s$ となる $P(s)$ の構成について.

isolated case では、上の $P(s)$ を直接求めることはせずに、他の方法で $b(s)$ を決定したのであった。しかし、non-isolated では、$P(s)$ を（現段階では）求めて、$b(s)$ を決定してみることが、理論構成をさぐる上からも重要である。

## 1. 一般的方法.

$f(x,y)$ : $r$-hom　$X_0 = \alpha x D_x + \beta y D_y$　$X_0 f = f$ とする.

今, $\begin{cases} A f^{s+1} = b'(s)\, x^{i+1} y^j f^s \\ B f^{s+1} = b'(s)\, x^i y^{j+1} f^s \end{cases}$

という式がもとまっているとせよ. このとき,

$$(\alpha D_x A + \beta D_y B) f^{s+1} = b'(s)(\alpha D_x x + \beta D_y y)\, x^i y^j f^s$$
$$= b'(s)(s + (i+1)\alpha + (j+1)\beta)\, x^i y^j f^s$$

これを何度もつかう.

$\begin{cases} P_0 f^{s+1} = x^m b_0(s) f^s \\ P_1 f^{s+1} = x^{m-1} y\, b_1(s) f^s \\ \vdots \\ P_m f^{s+1} = y^m b_m(s) f^s \end{cases}$　として,　$l.c.m(b_i, b_{i+1}) = b_{1,i}(s)$

$C_x^{1,0}(s)\, b_0(s) = b_{1,0}(s)$

$C_y^{1,0}(s)\, b_1(s) = b_{1,0}(s)$

$C_x^{1,1}(s)\, b_1(s) = b_{1,1}(s)$

$C_y^{1,2}(s)\, b_2(s) = b_{1,2}(s)$　などとおく.

$b_{2,0}(s) = l.c.m\big((s + \alpha m + \beta)\, b_{1,0}(s),\ (s + \alpha(m-1) + \beta)\, b_{1,1}(s)\big)$

などとおいていくと、いつか、$b_{m,0}(s)$ までいく.

特に、$b_0(s) = \cdots = b_m(s) = B(s)$　$\alpha = \beta = \frac{1}{r}$ であると,

$$b(s) \,\Big|\, \prod_{j=2}^{m+1} \left(s + \frac{j}{r}\right) B(s)$$

例1. $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$ $\qquad X_0 = \frac{1}{2}xD_x + \frac{1}{3}yD_y$

$$D_x f^{s+1} = (s+1)\,x f^s$$

$$D_y f^{s+1} = (s+1)\,y^2 f^s$$

$$\left(\frac{1}{2}D_x \cdot y D_x + \frac{1}{3}D_y \cdot D_y\right) f^{s+1} = (s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right) y f^s$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(s+\frac{7}{6}\right)D_x \cdot D_x + \frac{1}{3}D_y\left(\frac{1}{2}D_x y D_x + \frac{1}{3}D_y^2\right)\right\} f^{s+1} = (s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right) f^s .$$

## 2. Brieskorn polynomial

$f = x_1^{n_1} + \cdots + x_N^{n_N}$. $\qquad D_i f^{s+1} = (s+1)\,n_i\,x_i^{n_i-1} f^s$

以下、monomial と、その巾を plot した $\mathbb{N}_0^n$ の pt. とを同一視してよぶ。1. の手法では、ある monomial $x^\alpha$ に対して、$|\alpha|+1$ 次の $N$ 個の monomials を求めることにより生じた factor が対応している。

$x^\alpha$ から、正の quadrant をかいたとき、その内部、境界の monomials たちのおかげで $P^\alpha(s) f^{s+1} = x^\alpha b'(s) f^s$ とできるのだが、$s+\gamma$ という factor が、もし その quadrant の 2つの monomial に対応してでてきたとせよ。このとき、一方の monomial を頂点とする正の quadrant が、もう一方の monomial を含んでいるなら、$(s+\gamma)^2$ となり、包含関係がなければ、$s+\alpha$ でよいことが inductive method をみればわかる。Brieskorn poly. の場合、$x_1^{n_1-1}\cdots x_N^{n_N-1}$ を頂点とする負の quadrant の monomials についてしらべればよい。このとき、各 monomials から寄与する factor について、直前にのべた、初めの事態はおこらない。よって、$b(s)$ の factor が、すべて simple にもとまる。

実際に $P_{(n_1\cdots n_N)}(s) f^{s+1} = b(s) f^s$ となる $P$ を構成することが可能である。

## II. Join Conjecture.

1. monodromy theory においては，isolatedでは Thom-Sebastiani による Join theorem．non-isolatedでは Sakamoto によるものがある．

我々の $b$ は最小多項式的であるから，一般に Join theorem を構成することは，non-isolated の場合複雑であろう．しかし，その試みを述べてみたい．

A : $n\times n$ B : $m\times m$ matrices．最小多項式にそれぞれ $(s+\alpha)^l$, $(s+\beta)^k$ なる factors があるとせよ．このとき，$A\otimes I_m + I_n\otimes B$ の最小多項式は，$(s+\alpha+\beta)^{l+k-1}$ を factor とする．これをふまえ，$g(x)+h(y)$ の $b$-函数を，$b_g$, $b_h$ から構成する方法をしりたい．

$$b_g = (s+1)\prod(s+\alpha_i)^{m(\alpha_i)} \qquad \alpha_i \neq \alpha_j$$
$$b_h = (s+1)\prod(s+\beta_j)^{m(\beta_j)} \qquad \beta_i \neq \beta_j$$

$\gamma_{i,j} = \alpha_i+\beta_j$ とし，等しいものはまとめ通し番号をつけ，$\gamma_k$ とする．$m(\gamma_k) = \max\limits_{\substack{(i,j)\\ \gamma_k=\alpha_i+\beta_j}} (m(\alpha_i)+m(\beta_j)-1)$ とおく．

<u>Join Conjecture 1.</u>

$$b_{g+h}(s) = (s+1)\prod(s+\gamma_k)^{m(\gamma_k)}$$

isolated ではこれでいいであろうとおもわれるが，non-isolated の場合，修正の必要があるかもしれない．適当な実例では，non-isolated でも，よくあっている．

2. $f(t,x) = \frac{1}{n}t^n + g(x)$.

Join の典型として，様々のものを考える．

$\mathcal{J}_f[s] \supset \mathcal{J}_g[s - \frac{1}{n}tD_t]$, $\ni g_j D_t - t^{n-1}D_j$, $fD_t - t^{n-1}s$.

次のことが成立する．（柏原）

Thm. $b_f(s) \mid (s+1)\,\mathrm{l.c.m}\left(b'_g(s+\frac{1}{n}), \dots, b'_g(s+\frac{n-1}{n})\right)$.

ここに，$b_g(s) = (s+1)b'_g(s)$.

証明は，上の ideals の包含に注目し，

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}_f[s] + \mathcal{D}[s]t^{n-1} + \mathcal{D}[s]g_j$$
$$\uparrow$$
$$\mathcal{M}' = \mathcal{D}[s]/\mathcal{D}\mathcal{J}_g[s-\tfrac{1}{n}tD_t] + \mathcal{D}[s]g_j + \mathcal{D}[s]\underset{\sim\sim}{t^{n-1}}$$
$$= \bigoplus_{j=0}^{n-2} \mathcal{D}'[s]/\mathcal{J}_g[s+\tfrac{j}{n}] + \mathcal{D}'[s]g_j$$

から従う．詳細は略．

殆んどの場合，Thm において，等号が成立する．Thm において，<u>等号</u> をもって命題としたものを，

<u>Join Conjecture (special case) 2</u> とする．

# III. Examples.

1. $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$

$$D_1^{a_1}\cdots D_n^{a_n} f^{s+1} = \underbrace{\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j=1}^{a_j}\left(s+\frac{i_j}{a_j}\right)}_{b(s)} f^{s}$$

~~gcd ai~~, $(s+1)^n$ 以外にも，multiple factor が出るが，一般にへらせないことが，ある手法で示せる.

2. $x^n + y^l z^m$

$$D = \left\{(j,k) \;\middle|\; 0 \le j \le l-2,\ 0 \le m \le k-2,\ \frac{j+1}{l} = \frac{k+1}{m}\right\}$$

$$\mathrm{g.c.d}(l,m) = d \Rightarrow \# D = d-1.$$

$$b(s) = (s+1)\cdot\left[\prod_{i=0}^{n-2}\left(s+\frac{i+1}{n}+1\right)\prod_{\substack{0\le i\le n-2\\ 0\le j\le l-2}}\left(s+\frac{i+1}{n}+\frac{j+1}{l}\right)\prod_{\substack{0\le i\le n-2\\ 0\le k\le m-2}}\left(s+\frac{i+1}{n}+\frac{k+1}{m}\right)\right]_D$$

ここで $[\ ]_D$ とは，$D=\phi$ なら red のこと.

$D\neq\phi$ なら，$[\ ]$ 内第2，第3因子で $D\ni(j,k)$ に対応する factor 達は，(第1因子にあるかどうかにかかわらず) 2乗でとり，他は red. とする.

$l=1$ の場合は既出である.

この結果は，Join Conjectures とあう.

例1 $x^6+y^2z^3$

$D=\phi$

$[\ ]$ 内 第一因子 $\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{11}{6}\right)$

第二 〃 $\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)(s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)$

第三 〃 $\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)^2(s+1)^2\left(s+\frac{7}{6}\right)^2\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$

$$b(s) = (s+1)\cdot(s+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\left(s+\frac{2}{3}\right)\left(s+\frac{4}{3}\right)\left(s+\frac{5}{3}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{11}{6}\right)$$

実際に、 $P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$ となる $P$ を構成する。
g-hom の operator が $\frac{1}{n}xD_x + \frac{1}{l}yD_y$, $\frac{1}{n}xD_x + \frac{1}{m}zD_z$ などととれることを利用する。まず $\{\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \cdots, \frac{l-1}{l}, \frac{1}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}\}$ を大小順にならべ ($\begin{smallmatrix} l=2 \\ m=3 \end{smallmatrix}$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$) それをにらみながら $(l+m-1)(n-1)$ steps でつくる。証明には色々準備を要するので略。

$x^n + y^l z^m$ の loc. monodromy は

$H_0 = \mathbb{Z}$ $\qquad$ id $\qquad$ $t-1$

$$H_1 = (n-1)(d-1)\mathbb{Z} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & & -1 \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{n-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} & & -1 \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{d-1} \qquad \frac{(t^{nd}-1)(t-1)}{(t^n-1)(t^d-1)}$$

$$H_2 = (n-1)d\,\mathbb{Z} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & & -1 \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{n-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{d} \qquad \frac{t^{nd}-1}{t^d-1} \quad ((n,d)=1 \text{ のとき})$$

$\zeta(t) = t^n - 1$ となりまことに簡単。
$H_1, H_2$ の部分に $nd$ が出るのは $\prod\left(s + \frac{i+1}{n} + \frac{*}{d}\right)^2$ と関係がある。

3. $x_1 x_2^{p_1} + \cdots + x_{2k-1}x_{2k}^{p_k}$

$$b(s) = (s+1)\left(\prod_{0 \le i_j \le \underset{\sim\sim}{p_j - 1}} \left(s + \frac{i_1}{p_1} + \cdots + \frac{i_k}{p_k}\right)\right)_{red}.$$

Brieskorn type と同様。一般に $f = g(x) + uv^p$ に対し

$$b_f(s) \mid (s+1)\,\mathrm{l.c.m}\left(b_g'(s+\tfrac{1}{p}), \cdots, b_g'(s+\tfrac{p-1}{p}), b_g(s+1)\right)$$

この場合 critical set $\Sigma$, $\dim_{\mathbb{C},0}\Sigma = k$. Milnor fibre は just $(k-1)$-connected.

$i_j = p_j - 1$ は, $\delta(x_1)\cdot\delta^{(p_1-1)}(x_2)\cdots$ などの影響.

従って, $f = x_1x_2^{p_1}+\cdots+x_{2k-1}x_{2k}^{p_k}+y_1^{q_1}+\cdots+y_l^{q_l}$ においては, $P(s)f^{s+1}=b(s)f^s$ の $P(s)$ をつくって,

$$b(s) = (s+1)\Bigg(\prod_{\substack{0\le i_j\le p_j-1\\ 0\le \alpha_\lambda\le q_\lambda-2}}\left(s+\frac{i_1}{p_1}+\cdots+\frac{i_k}{p_k}+\frac{\alpha_1}{q_1}+\cdots+\frac{\alpha_l}{q_l}\right)\Bigg)_{red}.$$

4. $(x_1x_2)^2+\cdots+(x_{2k-1}x_{2k})^2$

$$\frac{1}{4}\left(\sum x_{2i}^2 D_{2i-1}^2\right)f^{s+1} = (s+1)\left(s+\frac{k}{2}\right)\left(\prod x_{2i}^2\right)f^s$$

に注目.

$$b(s) = (s+1)\prod_{i=0}^{k}\left(s+\frac{k}{2}+\frac{i}{2}\right)^{k+1-i}$$

示してきくみあわせれば, わたしたちのものが もとめられる.

5. $\frac{1}{n}\{(xy)^n+(yz)^n+(zx)^n\}-\frac{1}{m}(xyz)^m \qquad c=\frac{3m}{2n}-1$

$X_0=\frac{1}{2n}\langle x, D\rangle$, $X_1=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(xD_x+yD_y)+\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{m}\right)zD_z$.

$n \le m \Rightarrow$ quasi-hom $X_0$

$2m>n>m \Rightarrow$ operator で positivity 成立

$\frac{3}{2}m>n>m \quad c>0 \quad (\rho-X_0+c)(\rho-X_0+1)(\rho-X_0)+\cdots$

$\frac{3}{2}m=n \quad c=0 \quad$ hom $(\rho-X_0)$

$2m>n>\frac{3}{2}m \quad c<0 \quad (\rho-X_1)(\rho-X_2)(\rho-X_3)$

ここまではよいが，次に $\boxed{n>2m}$ とすると，
$2\ge \ell(f)$ しかし，canonical な $X_1\ X_2\ X_3$ で positivity は成立しなくなる.

e.g. $n=6$, $m=2$.

$X_1=\frac{1}{3}(xD_x+yD_y)-\frac{1}{6}zD_z$.

$(\rho-X_1)(\rho-X_3)-4x^8(yz)^2(\rho-X_0+1)(\rho-X_0)$

このようにして，simplex type でも，simplex の外にだして おけばいいのかな？

# 第六章. 未来への展望. 反省をこめて.

## 1. $b(s)$ の安定性. $b_{red}(s)$

$b$ 函数と monodromy の固有値の根本的ちがいは, exp の肩にのせる前である, ということであり, それ故 monodromy の一致するものでも, $b(s)$ が異なることは, しばしばおこること ―いやだいたいそう― であった。

$\mu$-cte family というような強い条件では, 固有値が mod $\mathbb{Z}$ で shift しうるということは, すでに初期に三輪の指摘したことであった. (p.41) これなどは, $\mu$-cte non-quasi-hom family とでもすれば防ぎそうな気もするが, 今後は, non-quasi-hom をえがけていかねばならないであろう. 少なくとも, 次のことはかなり当然であろう.

$$\mu\text{-cte},\ L(f)\text{-cte family} \Rightarrow b(s)\ \text{安定}.$$

だが, そのような命題をさがすのでなく, $b(s)$ に近いが, 少しちがったものを考えてみよう, ということも, あながちわるいことではあるまい. だがその場合, monodromy が一致すれば, それも一致する, などということになっては, あまりおもしろくない. 実際, monodromy では判別できない M. Oshima の例 (p.45) などが, $b(s)$ で判別される, というようなことは期待したいからである。

本論文においてはふれなかったが, reduced $b$-fn というものが定義されており, たとえば解析接続の $\gamma$-factor には, それで十分なことがわかっている. 今後 $b_{red}(s)$ についても, 色々調べねばなるまい。

2. Topology における定理に対応する定理.

$f(x)$ の $b$-函数を $b_f(s)$, $g(y)$ のそれを $b_g(s)$ とするとき, ($x$ と $y$ は全くちがう変数)

$$b_{f(x)g(y)}(s) = b_f(s)\,b_g(s)$$

はよかろう.

それでは, $h(x,y) = f(x) + g(y)$ に対してはどうなるべきか??

$f$, $g$ ともに quasi-hom なら, $b_f(s) = \prod(s+\alpha_i)$ $b_g(s) = \prod(s+\beta_j)$ として, $b_h(s) = \prod(s+\alpha_i+\beta_j)$.

そして又, Topology の教えるところによれば, monodromy の方では, $h$ の monodromy 行列が, $f, g$ のそれぞれの tensor となり, よって, monodromy の固有値は 積になっている. したがって, 我々の立場でも当然 $b_h(s)$ の根は ($b_f(s)$ の根) + ($b_g(s)$ の根) mod $\mathbb{Z}$ のはずである。あるいは, mod $\mathbb{Z}$ なしでいいのかもしれない.

断片的結果はあるが, 将来の問題として,

$h(x,y) = f(x) + g(y)$ $\Rightarrow$ $b_h$ は $b_f$ $b_g$ からどのように きまるか? e.g.

$$b_h(s) = \prod(s+\alpha_i+\beta_j)$$

$$\left(b_f = \prod(s+\alpha_i) \quad b_g = \prod(s+\beta_j)\right)$$

は常に正しいことか?

D, topology に次の定理あり.

(i) $f(x) = g(x) + h(x)$ : $g(x)$ : w-hom. isol. sing
$f(x)$ : isol. sing

$h(x)$ は, $g$ の weight に関して higher order

⇒. $f$ の def する Milnor fib. $=$ $g$ の def. する Milnor fib. ⌟

しかるに、我々の $b(s)$ では固有値が一般に mod $\mathbb{Z}$ でうごくことを、さんざん承知している。少なくとも、$s^2 - sA - B$ がとれるときは、$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:(f)$ 個がひっこしてきて小さくなる。さて、もっとも気になることは、一般にこのような状況で、絶対値最小の根はかわらないか？ということ。i.e.

$$
◎の仮定 \Rightarrow \left(\begin{array}{ll} b_g(s) = (s+1)(s+\alpha)\cdots & \alpha : |\alpha| 最小 \\ \Rightarrow b_f(s) = (s+1)\cdot(s+\alpha)\cdots & \end{array}\right)
$$

現在までのところ、絶対値最小の根が、その地位をうばわれた例はない。(w.hom のとき、絶対値最小の根 $= -\left(\sum \frac{n_i}{r}\right)$)
これは、asymptotic exp. ともかかわり重要である。
又、w-hom などという、カタクルシイ条件でなく、いかなる状況のもので、このようなことがいえるのか？
これは、1.でいった $b(s)$ の安定性ともかかわっている。

3. $\mathfrak{g}[s]$ の計算と他の分野のかかわり.

$\mathfrak{M}$ が、Gauss Manin connection と深く関係あることは、わかっている。ところで、link 等への $b(s)$ 計算では、出てきた作用素からただちに $b(s)$ は判別された。一方 Knot theory では、Alexander Matrix からただちに固有多項式がわかる。どちらも大変な計算をするわけだが、この計算法をよくてらしあわせると、何らかの関係がつかめるかもしれない。

Seifert Matrix との関連，というのはあまりありそうにないが，ともかく knot, link の Alexander matrix とは，何なのだろうか。そういうことが少しでもつかめたら，ch. index $\geq 2$ の場合の計算もきっとできるであろう．

4. 予想達.

基本予想 S.KS はくずれた．一方 K, Kdec はうらづけるような data ばかり出ている。こちらは，かなり成立しそうな気配（などといってもあてにならない）．ともかくも，S.KS がくずれた以上，理論構成において修正を余儀なくされるところが多い。又，基本予想が成立しないといっても，成立しない場所がかなり少ないのなら（$P(x)$ で考えてるのだが），なにか手はあるのかもしれない。

$L(f)$ にまつわる予想も，どうなるだろうか．

5. non-simplex type.

non-simplex type に関する計算は，現在の手法では，かなりめんどくさい。又，Newton polygon では，operators の見当が全くつかないのでは，Newton polyhedron をなんとか修正して，operators の見当をつける方法があるだろうか？ 計算を computer にさせるといっても，(K), Kdec をうらづけるように，うまく output させるのは，programm が至難のわざである。もう少し理論を作らねばならない。

## 6. non-isolated case

isolated の時, Hom($\mathcal{M}$, $\mathcal{B}_{pt}$), $\Omega^n \otimes \mathcal{M}$ を用いたように, $\mathcal{E}xt$, $\mathcal{T}or$ をつかうことになるのだが, $\mathcal{T}or$ の方がよくて, $\mathcal{E}xt$ で, cohomology との対応をつけようとすると, うまくいかぬことがあるという。(柏原)
ともかくも, 理論を再検討する以上に, より実例にあたり調べねばならない. singularity の色々な次元の stratum に起因する $b(s)$ と 総合的な $b(s)$ はどう関係しているか。…… ともかくも, non-isolated case は, 手のついてないことが多い.

## 7. reducible case.

さらに一般に, $f(x)=f_1(x)\cdots f_n(x)$ であればどうなるか! prehomogeneous の類推で $f_1^{s_1}\cdots f_n^{s_n}$ を考えるべきか.
多少の理論はあるが, この多変数 b 函数については, 実例にとぼしい.

* 京都大学理学研究科数学専攻

S. I. Bernshtein の定理.

一般の多項式 $f$ について，$f^s$ $s\in\mathbb{C}$ を $\mathrm{Re}\, s$ 十分大から $\forall s\in\mathbb{C}$ へ解析接続せよ，という I.M. Gelfand の問題に対し 2つの道がある．一つは，広中の resolution theorem を用い，$x_+^{\alpha}$ などに帰着させるもの．もう一つは，M. Riesz の系譜というべき，$P(s,x,D)f^{s+1}=b(s)f^s$ という $P$, $b$ の存在を示し，$b(s)$ から $\gamma$-factor をつくるもの．我々は今第二の道に関心をもつ．この方向での初めての結果は，I. N. Bernshtein による，次の定理であった．([ ])

**Theorem.** (q-h case) $f$: quasi-hom. poly. isolated sing. at 0 in $\mathbb{C}^n$. $\mathfrak{a}=(f_{x_1},\dots,f_{x_n})\supset \mathfrak{m}^k$ とする．又，$\mu=\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$.
$Xf=f$ という vector field を一つとっておく．
このとき，$^\exists B(t)$: $\mathbb{C}$-coeff. polynomial of degree $\mu\binom{n+k-1}{n}$
s.t. $B(X)\in\mathcal{D}\otimes\mathfrak{a}$ i.e. $B(X)=\sum J_i f_i$; $P(x,D)=\sum J_i D_i$ とおくと，

$$P(x,D)f^{s+1}=(s+1)\,B(s)f^s.$$

この場合，証明の方法から，$B$ の次数が評価される．一般の $f$ については [ ] において，

**Theorem** (general case) $f$: polynomial.
$\Rightarrow$ $^\exists P(s,x,D_x)$ $s$ について多項式で，$x$ の多項式係数偏微分作用素を係数としている．$^\exists B(s)$: non-zero polynomial s.t.

$$P(s,x,D_x)f^{s+1}=B(s)f^s.$$

今度の場合，証明方法の性質上，Pについてあまり情報はない．同様のことが $f$: hol. としても成立することが，Björk　　により示されているが，方針は殆ど同じ．

尚，同様の証明方針で，次の定理も得る．

Theorem　$f$: real coeff. positive polynomial. increases at infinity.

$\Phi(\lambda) = \int f^{-\lambda}(x)\,dx$ とおくと，$\Phi(\lambda)$ は $\lambda \in \mathbb{C}$ に meromorphic に extend され，$\lambda$ の rat. fns $a_i$ をとって

$$\Phi(\lambda) = a_1(\lambda)\Phi(\lambda+1) + \cdots + a_k(\lambda)\Phi(\lambda+k).$$

ここの $a_i(\lambda)$ にも興味があるが，当面は考えない．

これ ( ) の証明については原論文にあたっていただきたいが，標数 $0$ の体 $K$，$R_N = K[x_1, \cdots, x_N]$．$D_N = R_N$ 係数偏微分作用素のなすring．としたときに，$D_N$ は Noetherian ring であり，

$$gl.\dim D_N = N$$

であることが本質的である．(標数 $p$ では成立しない)．

local holomorphic fn 係数 diff. op. の ring $\mathcal{D}^f$ についても

$$gl.\dim \mathcal{D}^f = N$$

これについては 柏原　　を参照せよ．

漸近展開と b 函数.

$\int \exp(\frac{1}{h}if)\varphi(x)dx \quad \varphi \in C_0^\infty \quad \mathrm{supp}\,\varphi \ni 0$ の漸近展開は，色々な分野において重要であるが，我々の場合も又そうである。
$f$ が 0 を non-degenerate critical pt. とするとき，

$$\int \exp(\frac{1}{h}if)\varphi(x)dx = O(h^{\frac{n}{2}})$$

はよくしられている．この $h$ の巾 $\frac{n}{2}$ は，

$$\Delta(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{s+1} = 4(s+1)(s+\tfrac{n}{2})(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{s}$$

における $s+\frac{n}{2}$ に表われているところのである．V. I. Arnold [ 　] は次のことを示した．(尚 Duistermaat 　も参照)

Theorem. $f$: weighted hom. $(r; r_1, \cdots, r_n)$.

$$\int \exp(\tfrac{1}{h}if)\varphi(x) = O(h^{\alpha+\varepsilon})_{(\forall\varepsilon)}$$ が最良評価とすれば，

$\alpha = \sum \frac{r_i}{r}$ である．

以下に，monodromy theory との関連などをまとめておく．説明の部分では，わずらわしい定数などは省略する．厳密な処理 ( monodromy の abelian integral による表現など) については又，稿を改めることとしたい．

次の積分が重要であり，他は Mellin, Fourier 変換でつながっている． $df\wedge\omega = dx$. とし， (以下たとえば $f$: reel coeff. として)

$$I(c) = \int_{f=c}\varphi(x)\omega = \langle\delta(f-c), \varphi\rangle .$$

Бер-Рел によれば 常に $I(c) = \sum c_i(\log c)^{k_i}c^{r_i} + \cdots$

$k_i$: integer $0\le k_i\le N-1$. $r_i\in\mathbb{Q}$ の形の漸近展開をもつ．

今後，展開主項に $c^{\alpha-1}(\log c)^{\beta-1}$ という項があるとする．

$P(s+1, x, D)f^{s+1} = b(s)f^{s}$ としよう．

$$\langle f_+^s, \varphi\rangle = \int_{f>0} f^s\varphi dx = \int_0^\infty c^s I(c)dc$$ と，

$$\int c^{s+\alpha-1}(\log c)^{\beta-1}dc \sim \frac{c^{s+\alpha}(\log c)^{\beta-1}}{s+\alpha} + \cdots + \frac{c^{s+\alpha}}{(s+\alpha)^{\beta}}$$

に注意して，

$$\langle Pf^{s+1}, \varphi\rangle = b(s)\langle f^s, \varphi\rangle = b(s)\int_0^\infty c^s I(c;\varphi)\,dc$$
$$\sim b(s)\left(\frac{c^{s+\alpha}}{(s+\alpha)^\beta}+\cdots\right)$$
$$\|$$
$$\langle f^{s+1}, P^*\varphi\rangle = \int_0^\infty c^{s+1} I(c;P^*\varphi)\,dc \sim \left(\frac{c^{s+\alpha+1}}{(s+\alpha+1)^\beta}+\cdots+\frac{c^{s+\alpha+1}(\log c)^{\beta-1}}{s+\alpha+1}\right.$$

この両端を比較すれば，（この計算完全に正確ではない）

$(s+\alpha)^\beta \mid b(s)$　となるべきであろう．これを

Fourier 変換で stationary phase へうつす．

さて，今度は，$\int_0^\infty e^{i\tau c} I(c)dc = \int_{f>0} e^{i\tau f}\varphi\,dx$ であることと，

$\int e^{i\tau c} c^{\alpha-1}(\log c)^{\beta-1}dc \sim \tau^{-\alpha}(\log \tau)^{\beta-1}$ に注意すると，

◎　$\int \exp\left(\frac{1}{\hbar} i f\right)\varphi\,dx \sim \hbar^\alpha(\log \hbar)^{\beta-1} \Rightarrow (s+\alpha)^\beta \mid b(s)$.

がおおよそなっとくされるであろう．一方 monodromy theory では，

☆．$I(c) = \sum_\alpha c_{\alpha,p}\, c^\alpha(\log c)^p$　（~~$c_{\alpha,p}\neq 0$~~）　$\alpha\in\mathbb{Q}$．

$\Rightarrow$　$0\le p\le n-1$，　$c_{\alpha,p}\neq 0 \Rightarrow \exp(2\pi i\alpha)$ は local monodromy の p-ple root．(nilpotent つき)

が知られている．（より一般的な形にかくべきであるが），

これが，$b(s)$ の最小多項式との関連をにおわす一つの

根拠である．

尚 Malgrange は，$f=(x_1\cdots x_n)^2+x_1^{2n+2}+\cdots+x_n^{2n+2}$

$\omega = x_1 dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$ として

$\int_{f=c}\omega \sim \mathrm{Const}\sqrt{c}(\log c)^{n-1}$　より，この $f$ に対しては

$-1$ が $n$ 重根になっていることを示した．我々の立場

から考えたところ, $b(s)=(s+1)\cdot(s+\frac{1}{2})^{n}\cdots$ となるようである。これについては p.　　を参照せよ。

一般に $\int \exp(\frac{1}{h} i f)\varphi(x)dx = O(h^{\alpha})$ となる最良評価の $\alpha$ は, $b(s)/(s+1)$ の絶対値最小の根になるとおもわれる. Arnold　は, $\alpha=\frac{n}{2}-\beta$ と書き, さらに $\beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{N}$ とすれば, (一般に $N=\infty$, $<0$ にもなりうるが) $N$ が Coxeter number といわれるものと関係していることを示している. 尚 Saito　も参照.

Malgrange は ＊ において, $C_{\alpha,p}=0$ for $\alpha\leq 0$ を示した. それらについては Seminainaire Leray の彼の lecture を参照のこと.

$\sigma(f)=\inf(\alpha \mid C_{\alpha,p}\neq 0\ \exists p)$ は, $f$ の 0 での singularity をある意味で測っているが, だれしも気になることは,
"$\sigma(f)$ は deformation に関し下半連続であるか?".

$I(c)$ は, $f^{s}$ の Re $s$ 十分大からの解析接続に当然関係しているわけだが, $b$ 函数を経由しない直接のあつかいに関して Гел.－Шил. [　], И.Н.Бер. [　] などを参照せよ.

## Quasi-homogeneous function について．関連する問題

Def. $f$: hol. near 0. quasi-hom. とは，$f \in \mathfrak{a}$ のこと．
但し $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$．即ち $\exists X = \sum a_i(x) D_i$
s.t. $Xf = f$．

Def. $f$: polynomial. weighted-hom $(r; r_1, \cdots, r_n)$ とは，
$f(t^{r_1}x_1, t^{r_2}x_2, \cdots, t^{r_n}x_n) = t^r f(x)$ $\forall t$. $r, r_i \in \mathbb{N}$.
のこと，$(r, r_1, \cdots, r_n) = 1$ にとり，weight と呼ぶ．
$X = \sum \frac{r_i}{r} x_i D_i$ とすれば，$Xf = f$．

p.　　の手法ですぐわかることは，$\tilde{f}$ を sweeped $f$ として
Prop. $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} a_i m^{(i)}$ 　$(m^{(1)}, \cdots, m^{(n)})$ が $n-1$-simplex をなす
$\Rightarrow f$: quasi-hom.

Theorem (Saito　　)
$f$: quasi-hom, isolated sing. $\Rightarrow$ 適当に座標変換して
$f$ は weighted-hom. polynomial に変換される．

上の Prop の場合では，weight は $(m^{(1)}, \cdots, m^{(n)})$ のはる $n-1$ 次元
hyperplane の定義式 $h(x) = 1$ 　$\sum a_i x_i = 1$ をとったとき，
$X = \sum a_i x_i D_i$ に対して weighted-hom になる．

Theorem (Saito　　)
$f$: non-quasi-hom. $\Leftrightarrow$ $h = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \in \mathfrak{a} + (f)$

もちろん $f$: non-quasi-hom の定義は $f \notin \mathfrak{a}$ であるが，実際に判定するには，$\mathfrak{a} + (f)$ に入ることを確める方がやりやすい．

non-quasi-hom でも, $f^2 \in \mathfrak{a}f+\mathfrak{a}^2$ であれば, わりと quasi-hom に近いとおもえる。この場合, 我々の立場から一つ問題がおこる.

$$f \notin \mathfrak{a},\ f^2+\sum a_i f_i+\sum a_{ij} f_i f_j=0 \Rightarrow \sum a_{ij} f_{ij} \in \mathfrak{a}+(f) \quad \boxed{?}$$

これに対し $\mathfrak{a}: f=\mathfrak{m}$ が十分条件であることが知られているが, 一般には証明されていない. 尚, 仮定を $af^2+\cdots$ とすれば, Malgrange の例は反例を与える. p.　　参照. 反例があるかもしれず, 微妙な問題である.

次の問題は, $f$ がこの type でないことを判定する, よい必要十分条件をみつけることである. この"よい"というのは, $f \notin \mathfrak{a}$ より $h \in \mathfrak{a}+(f)$ の方が"よい"という基準. 即ち

$$\left.\begin{array}{l} f^2 \notin \mathfrak{a}f+\mathfrak{a}^2 \\ \text{又は } f^2+\sum a_i f_i+\sum a_{ij} f_i f_j=0 \text{ but } \sum a_{ij} f_{ij} \notin \mathfrak{a}+(f) \end{array}\right]$$

という条件を, 何かが, どこかへ入るという形にかきなおすことである。場合によっては, 「又は」以下なしの形で条件がまとまるのかもしれない.

## 広中の定理に関連して.
## — 加藤満生氏による注意 —

$f$: hol. near 0.   $\mathfrak{a} = (f_{x_1}, \cdots, f_{x_n})$ としたとき,

Theorem (Hironaka)   $f$: integral / $\mathfrak{a}$.
( $f$: integral / $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$   Lê - Ramanujan )

この定理, 代数の方たちは,「$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}+(f)$ の integral closure が一致する」として処理されるため, $f^\ell \in \mathfrak{a}f^{\ell-1}+\cdots+\mathfrak{a}^\ell$ となる初めての $\ell$ i.e. $L'(f)$ に興味をもつ我らにとってはこまる. $L'(f)$ を, 又, (更, さらに Lê - Ramanujan における $L''(f)$ を同様に定義して) $L''(f)$ を explicit に評価する方法を加藤満生氏（私と同級. 京大修士 2）がつくられたので, それを紹介させていただきたい。色々お教えいただいた, 加藤氏に深く感謝いたします. (以下加藤氏よりいただいた原稿より)

Theorem (加藤)   $f$: irr.   $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$ と仮定する.

$$F_1 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2+1}$$
$$x \longmapsto (f(x), x_1 f_1(x), \cdots, x_n f_1(x), x_1 f_2(x), \cdots\cdots, x_n f_n(x))$$

$V_1 = F_1(\mathbb{C}^n)$   $0 \in \mathbb{C}^{n^2+1}$ での n-dim. irred. analytic set germ.

$\mu_1 = \mu((x_1 f_1, \cdots, x_n f_1, \cdots, x_n f_n)\mathcal{O}_n) = \mu(\mathfrak{m}\mathfrak{a})$ (ideal の multiplicity)

$\nu_1 = m(\mathcal{O}_{V_1,0}) = \mu_1 / (\mathbb{C}^n \to V_1$ の fibre の個数)

$$F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$
$$x \longmapsto (f(x), f_1(x), \cdots, f_n(x))$$   $V = F(\mathbb{C}^n)$

$\mu = \underset{\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}}{\underset{\|}{\mu(\mathfrak{a})}}$   $\nu = m(\mathcal{O}_{V,0}) = \mu / (\mathbb{C}^n \to V$ の fibre の個数)

とおけ, そのとき,

証明 i) $(v_0, v_1, \cdots, v_{n^2}) \in C(V_1)_0$. $\underline{v_0 \neq 0}$ と仮定する

(ここに $C(V_1)_0$ は $V_1$ の $0$ での Tangent cone)

$w_0 = v_0,\ w_1 = v_{n+1}, \cdots, w_n = v_{n^2}$ とする.

(i.e. $f, x_1f_1, x_2f_2, \cdots, x_nf_n$ に対応する index)

$\exists\, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}^n$ $\sum|a_i|^2 = 1$. $\varphi(t) = t\cdot(a_1, \cdots, a_n)$

: real analytic curve,

$$\lim_{t\to 0}\,[f(\varphi(t))_0 : x_1f_1(\varphi(t)) : \cdots : x_nf_n(\varphi(t))] = [w_0 : \cdots : w_n]$$

$\frac{d}{dt}f(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(\varphi(t))$ より,

$ord_t f(\varphi(t)) \geq \inf\{ord_t \underbrace{x_jf_j(\varphi(t))}_{a_j t f_j(\varphi(t))} ;\ 1 \le j \le n\}$

従って, $(w_1, \cdots, w_n) \neq (0, \cdots, 0)$

特に, $C(V_1)_0 \cap \{z_1 = \cdots = z_{n^2} = 0\} = \{0\}$ in $\mathbb{C}^{n^2+1}$

従って $\mathbb{C}^{n^2} = \{(z_1, \cdots, z_{n^2})\}$ の座標を適当にとって (一次変換)

$\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{C}^{n^2-n} \times \mathbb{C}^n = \{((w_1, \cdots, w_{n^2-n}), (y_1, \cdots, y_n))\}$

として, $C(V_1)_0 \cap \mathbb{C}\{z_0\} \times \mathbb{C}^{n^2-n}$

$= C(V_1) \cap \{y_1 = \cdots = y_n = 0\} = \{0\}$ とできる.

このとき, $\exists\, a_1(y), \cdots, a_{\nu_1}(y)$ $ord\, a_j \geq j$

$\nu_1 = m(\mathcal{O}_{V_1, 0})$

$$z_0^{\nu_1} + a_1(y) z_0^{\nu_1 - 1} + \cdots + a_{\nu_1}(y) = 0 \quad \text{on } V_1$$

$z_0$, $y'$ に $f$, $x_if_j$ を代入すればよい.

ii) $V$ に対しては, 上と同じ考え方により

$C(V)_0 = \{y_0 = \cdots 0\} = \mathbb{C}^n$ 従って 上と同様にして考えた

$b_j(y) = b_j(y_1, \cdots, y_n)$ の order は $j+1$ 以上とする

∵) $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in V$ なら $|y_0| = o(|y|)$

従って $|b_j(y)| = o(|y|)^j$ ($\Leftrightarrow$ $|b_j(y)|/|y|^j \to 0$ $|y| \to 0$)

注1) は i) の証明よりでる.

注2) は 次の如くに.

$f_j$ からできる $d_j$ 次斉次部分を $g_j(\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_n)$

$$g_j(\xi_0, \cdots, \xi_n) = \xi_0^{d_j} f_j(\xi_1/\xi_0, \cdots \xi_n/\xi_0) + \cdots$$

$f_j$ に関する 2つの仮定より,

$$\sum_1^n |g_j(\xi)|^2 = 0 \iff \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$$

従って, $\exists C, \alpha > 0$ $\quad \sum |g_j(\xi)|^2 \geq C(\sum_1^n |\xi_i|^2)^\alpha$ for $|\xi| \leq 2$

$|x| \geq 1$ の時, $|f_j(x)| = |x|^{d_j} |g_j(\frac{1}{|x|}, \frac{x_1}{|x|}, \cdots \frac{x_n}{|x|})|$

$$\geq |x|^{d_j} |g_j( \cdots )|$$

$$\sum |f_j(x)|^2 \geq |x|^{2d} \sum |g_j(\tfrac{1}{|x|}, \tfrac{x_1}{|x|}, \cdots, \tfrac{x_n}{|x|})|^2$$
$$\geq C|x|^{2d}$$

従って, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ の逆像 $(x \mapsto (f_1(x), \cdots f_n(x)))$ の点 $x$ $|x| \geq 1$ は, $|x| \leq (C^{-1} \sum |y_j|^2)^{1/2d} = C^{-\frac{1}{2d}} |y|^{1/d} = C_1 |y|^{1/d}$

従って, $|b_j(y)|$ の order $(y \to \infty)$ は,

$|y|^{j\nu/d}$ の order $(y \to \infty)$ 以下 ($\nu = \deg f$ で, $b_j(y)$ は $\{f(x)\}_{f(x)=y}$ の $j$ 次対称式だったから).

なお. $\bigcap$($f_j$ の最高次の零点) $= \{0\}$ がなくても, 上の Łojasiewicz の定数 $\alpha$ が $d$ より小にとれれば OK だが, これは一般に無理な期待とおもわれる.

(以上, 書きまちがいあれば, 矢野の責任.)

大変急いで写したので.

$\exists\ a_j(z_1,\cdots,z_{n^2}) \in m^j(\mathcal{O}_{n^2}) \qquad 1\le j\le \nu_1$

$\exists\ b_j(y_1,\cdots,y_n) \in m^{j+1}(\mathcal{O}_n) \qquad 1\le j\le \nu$

s.t. $f^{\nu_1}+a_1(x_1f_1,\cdots,x_nf_n)f^{\nu_1-1}+\cdots+a_{\nu_1}(x_1f_1,\cdots,x_nf_n)=0$

$f^{\nu}+b_1(f_1,\cdots f_n)f^{\nu}+\cdots+b_\nu(f_1,\cdots,f_n)=0.$

//.

注1) $\{x_1f_1=x_2f_2=x_3f_3=\cdots=x_nf_n=0\}\ni 0$ locally isolated ならば, (e.g. $f$: quasi-hom)

$F_2:\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$

$x \longmapsto (f,x_1f_1,\cdots,x_nf_n) \qquad V_2=F_2(\mathbb{C}^n)$

$\mu_2=\mu((x_1f_1,x_2f_2,\cdots,x_nf_n)\mathcal{O}_n)$

$\nu_2=m(\mathcal{O}_{V_2,0})=\mu_2/(\mathbb{C}^n\to V_2$ の fibre の個数) として,

$\exists\ C_j(w_1,\cdots,w_n)\in m^j(\mathcal{O}_n) \qquad 1\le j\le\nu_2$

$f^{\nu_2}+C_1(x_1f_1,\cdots x_nf_n)f^{\nu_2-1}+\cdots+C_{\nu_2}(x_1f_1,\cdots,x_nf_n)\equiv 0.$

( $f$: quasi-hom ならば $\nu_2=1$ )

注2) $f$: polynomial $\deg f=\nu$

$\{f_1=f_2=\cdots=f_n=0\}=\{0\}$ globally

$\bigcap_{j=1}^n(f_j$ の最高次の斉次部分 (の $\deg$ を $d_j$ とする) の零点$\}=\{0\}$ globally

$d=\inf d_j$

$\Longrightarrow$ 上の $b_j(y)$ は, $\deg\le j\nu/d$ の多項式にとれる.

((矢野) この定理により, symbol の段階で, どの程度まで必要かということは, ほとんどすべてわかる。強力な定理である. Macaulay local $(R,m)$ $\mathfrak{A}$: $m$-primary $\Rightarrow \mu(\mathfrak{A})=\dim \mathcal{O}/\mathfrak{A}$.

example. $f=\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}$: $f=\frac{1}{2}xf_x+\frac{1}{3}yf_y$, $f^2-(f_x^2)f+(\frac{1}{4}f_x^4+\frac{1}{9}f_y^3)=0$

$f=\frac{1}{3}(x^3+y^3)$: $f=\frac{1}{3}(xf_x+yf_y)$, $f^4-\frac{2}{9}(f_x^3+f_y^3)f^2+\frac{1}{9^2}(f_x^3-f_y^3)^2=0.$ )

5. $_3T_{8;2}$ の $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$, $\mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f))$ の代表元.

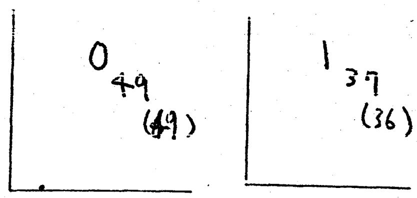
$_3T_{8;2}$ $\frac{1}{8}(x^8+y^8+z^8)-\frac{1}{2}(xyz)^2$ について,
$\mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f))$, $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ の代表元のとり方を示す.

$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a} = 215$. $\dim \mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f)) = 179$. $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^{17}$, $\mathfrak{a}+(f) \supseteq \mathfrak{m}^{13}$

$\mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f))$ については, 2通り示しておく. 表2のとり方の方が, $b(s)$ の計算にはよい.

表の見方. 黒丸●を順次むすんでできた図形の周上と内部の格子点が, $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ or $\mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f))$ の代表元を与える. 座標軸上に黒丸のある場合, 注意すること.

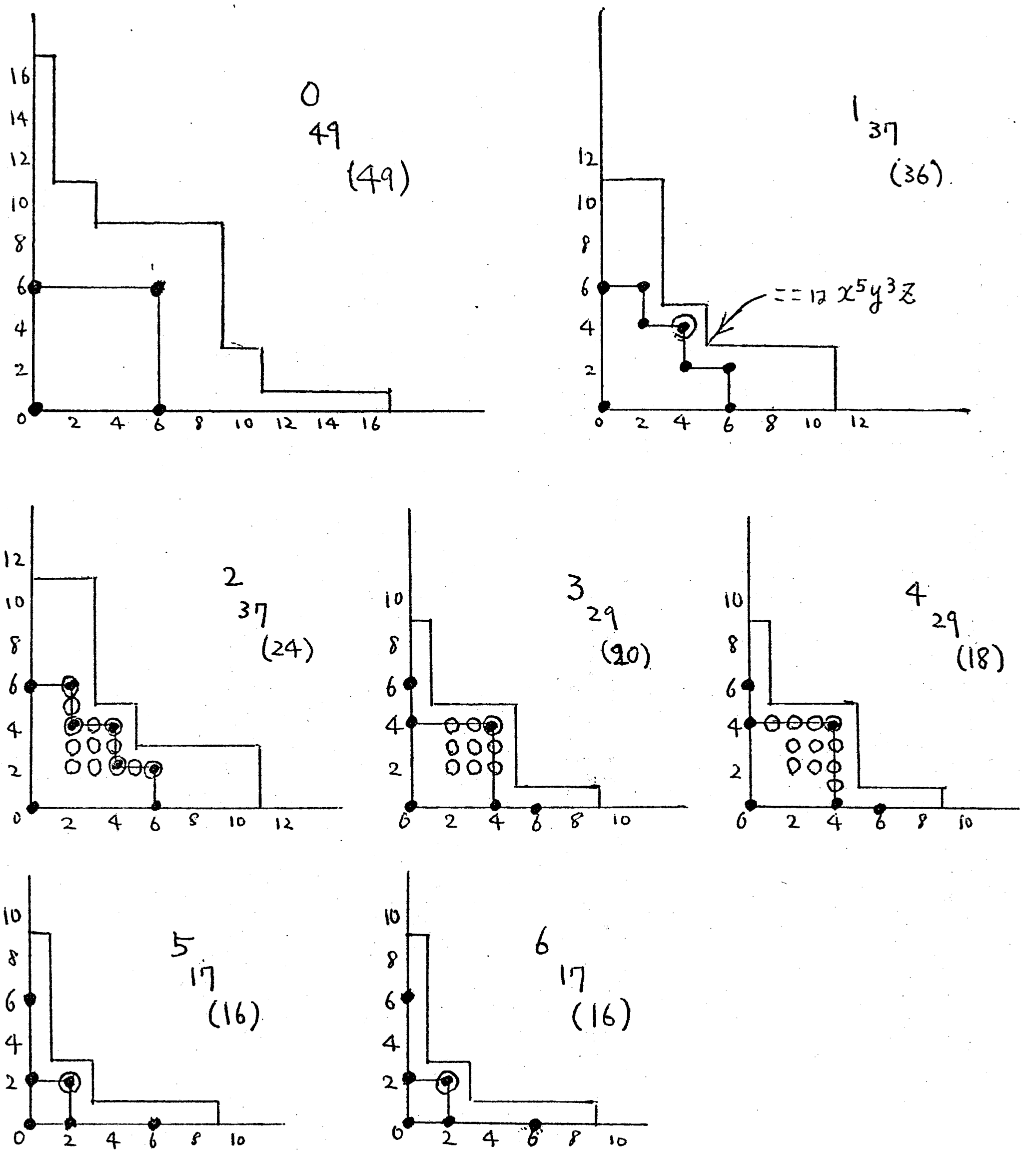
$x^k y^l z^m$ の, $m$ を一定にして切った $k$-$l$ 平面を示してある.




などはそれぞれ $m=0$ で, その代表元が 49コ. $m=1$ の代表元が 37コということを表わす.

表1の場合, (36) とは $\mathcal{O}/(\mathfrak{a}+(f))$ の代表元数.
ideal に属する monomial の見方も同様.
線分上も含めて, 外側がその ideal に入る.

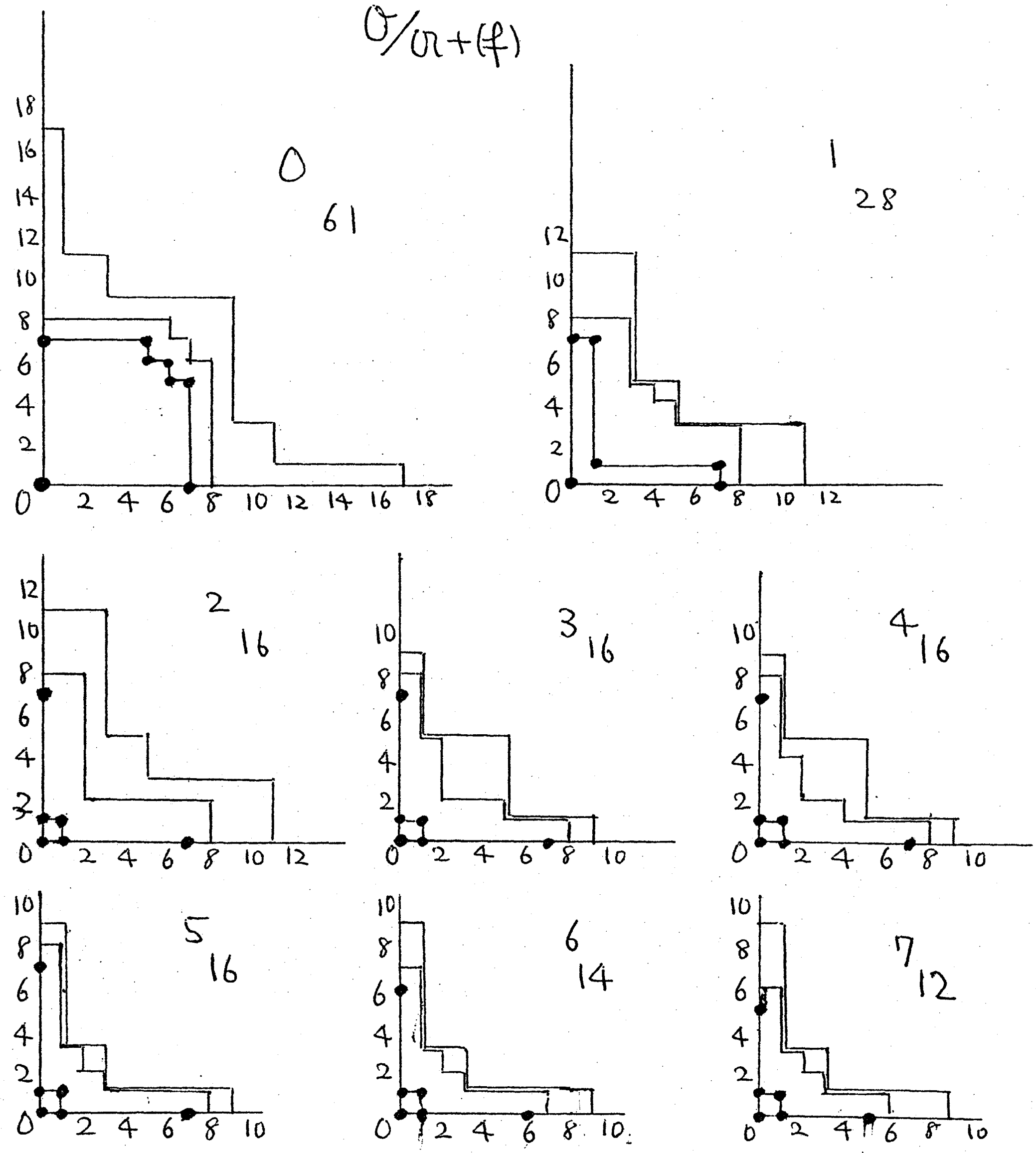
$\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ & $(\mathcal{O}/\mathfrak{a}+(f))$




外わくより外が $\mathfrak{a}$ の元となるもの.

○をつけたものは, $\mathcal{O}/\mathfrak{a}+f$ の代表としては失格

表1.




外わく から 外が $\mathfrak{m}$ に入り，中間のわくから外が $\mathfrak{m}+(f)$ に 入る．$\mathcal{O}/\mathfrak{m}+f$ の代表としては，このとり方の方がよい．0の代表元の右上隅のデコボコが，予想 S. KS の 反例の根拠となった．

表 2

# References.


1. A'Campo, N., Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes., Invent. Math. <u>20</u>, 1973, 147–169.

2. 〃 , On monodromy maps of hypersurface singularities, preprint.

3. 〃 , La fonction zêta d'une monodromie. preprint.

4. Arnol'd, V. I, Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of the projections of Lagrange manifolds, Funct. Anal. and its Appl., Vol <u>6</u>, No. 3, 1972, 61–62.

5. 〃 , Normal forms of functions with simple critical points, the Weyl groups $A_k$, $D_k$, $E_k$ and Lagrange manifolds, F.A.A. <u>6</u>, 4, 1972, 3–25.

6. 〃 , Classification of functions with unimodular critical points, F.A.A. <u>7</u>, 3, 1973. 75–76 (まちがいがある. 索引 L. M は K へ.)

7. 〃 , Remarks on the method of stationary phase and Coxeter numbers, Russ. Math. Surv. <u>28</u>, 5, 1973, 17–44. (N!! の $x^2y^2$ は $x^3y^2$ のはず)

8. I. N. Bernshtein; The possibility of analytic continuation of $f^{\lambda}$ for certain polinomials f, F.A.A. 2, 1, 1968, 92–93.

9. 〃, Modules over a ring of differential operators. Study of fundamental solutions of equations with constant coefficients, F.A.A. 5, 2, 1971, 1–16.

10. 〃, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, F.A.A. 6, 4, 1972, 26–40.

11. 〃 – S. I. Gel'fand, Meromorphy of the function $P^{\lambda}$, F.A.A. 3, 1, 1969, 84–86.

12. Duistermaat J. J., Oscilatory Integrals, Lagrange Immersions, and Unfolding of Singularities, preprint, Courant Institute, 1973.

13. Fox, R., Free Differential calculus II. isomorphism problem, Ann. of. Math. 59, 1954, 196–210.

14. 〃, Free Differential calculus V The Alexander polynomial Reexamined, Ann of Math. 71, 1960, 187–196.

15. 〃, A quick trip through knot theory, in Topology of 3-manifold and related topics

Prentice-Hall, 1962, 120-167.

16. Fox, R.H.-Crowell, R.H, 結び目理論入門, 岩波, 1967.

17. Grima, M-Cl, in preparation.

18. 広中平祐： 京都大学における代数幾何学講義, 197

19. 堀川 : Desingularization of cusps. (informal print).

20. 柏原正樹： b-函数と超曲面の特異性, to appear in Proc. of Symp of b-fn at RIMS. (三輪哲二記)

21. Malgrange, B; Letter to Editors, Inv. Math. 20, 1973, 171-172.

22. 〃, Monodromie et développements asymptotiques, to appear in Sem. Leray.

23. Mather, J.N; On Right Equivalence; preprint.

24. Milnor, J, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.

25 Nagata M, Local Rings, Interscience.

26. 佐藤幹夫, b函数の理論と計算の多重の unofficial prints.

27. Saito, K, Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Inv. Math 14, 1971, 123–142.

28 " , Einfach elliptische Singularitäten, preprint, Göttingen, 1973.

29. Siersma D, The singularities of $C^\infty$-functions of right codimention $\leq 8$, Indag. Math. 35, 1973, 31–37.

30. Thom, R, Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Benjamin, 1972. (並びにこの宇敷重広氏による訳)

31. Tougeron J. Cl, Idéaux de Fonctions Differentiables, Erg. der Math. 71, Springer, 1972.

11.5 J. E. Björk : Dimensions over Algebras of Differential Operotors, preprint.